

# Jeu CHSH : Quelle était la grande erreur d'Einstein ?

CAO Trong Nhan, GAUTRON Lison, HOFMANN Julien

6 Juin 2023

# Contents

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Présentation du jeu CHSH</b>	<b>4</b>
1.1 Contexte historique du jeu . . . . .	4
1.2 Principe du jeu . . . . .	4
<b>2 Les stratégies de réalisme local</b>	<b>5</b>
2.1 Stratégies déterministes et premières approches . . . . .	5
2.2 Stratégies probabilistes . . . . .	6
2.3 Vérification empirique de nos résultats dans le cadre réaliste locale . . . . .	6
<b>3 La stratégie quantique</b>	<b>7</b>
3.1 Préquis mathématiques . . . . .	7
3.1.1 Qubit . . . . .	7
3.1.2 Notation de Dirac (1/3) . . . . .	7
3.1.3 État quantique . . . . .	7
3.1.4 Superposition quantique: . . . . .	7
3.1.5 Observable quantique . . . . .	8
3.1.6 Valeurs d'une observable . . . . .	8
3.1.7 Mesurer la valeur d'une observable . . . . .	8
3.1.8 Notation de Dirac (2/3) . . . . .	8
3.1.9 Réduction du paquet d'ondes . . . . .	8
3.1.10 Produit tensoriel . . . . .	9
3.1.11 État intriqué . . . . .	10
3.1.12 Notation de Dirac (3/3) . . . . .	10
3.1.13 Puissance et utilité de l'intrication quantique . . . . .	10
3.2 Jeu CHSH . . . . .	11
3.2.1 Calculs préliminaires . . . . .	11
3.2.2 Protocole . . . . .	12
3.2.3 Résultats . . . . .	14
<b>4 L'avènement des probabilités pour décrire le monde : un changement de paradigme à contre-courant des grands penseurs</b>	<b>15</b>
4.1 L'approche probabiliste à travers le mathématicien Pierre-Simon Laplace . . . . .	15
4.2 La controverse Einstein-Bohr sur le quantique . . . . .	15
<b>Conclusion</b>	<b>17</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>18</b>

## Introduction

Ce rapport est réalisé dans le cadre du Module Projet, élément de formation de la 2ème année Modélisation, Informatique et Communication à l'INSA Toulouse. A travers celui-ci nous mettrons en exercice nos compétences en mathématiques et informatique sur un sujet donné. En l'occurrence, il s'agit de l'étude d'une expérience de pensée, nommée jeu CHSH, ayant participé à l'explication de phénomènes quantiques durant le XXème siècle.

Des notions de probabilités, d'algèbre et d'informatique abordées cette année nous ont permis de comprendre ce jeu, et d'élaborer ce rapport. Egalement, les cours de M. Pierre Botton nous ont servi de support pour ce rapport. Les explications de notions mathématiques, indispensables pour comprendre le jeu CHSH, en sont largement inspirées.

Aussi, ce rapport a pour objectif de répondre aux six objectifs listés au début du module, afin d'essayer de comprendre quelle était la grande erreur d'Einstein concernant sa compréhension des phénomènes quantiques à travers le jeu CHSH.

# 1 Présentation du jeu CHSH

## 1.1 Contexte historique du jeu

Bien qu'Albert Einstein ait été l'un des contributeurs les plus significatifs de la mécanique quantique, certains de ses phénomènes lui ont échappé, notamment l'effet du caractère quantique sur le monde macroscopique. Il paraissait inconcevable pour le scientifique allemand que deux particules éloignées l'une de l'autre puissent être intriquées. Il serait alors possible de "communiquer" en se servant de ces dernières, le tout sans support matériel, mais surtout avec une vitesse dépassant celle de la lumière ! Sa pensée reste héritière d'une approche déterministe de la science, que l'on explorera plus en détail en dernière partie.

Einstein a alors développé l'expérience de pensée EPR en 1935 avec Boris Podolsky et Nathan Rosen. Cette dernière permet, tout en réfutant l'école de Copenhague<sup>1</sup> et son interprétation probabiliste des phénomènes quantiques, d'arriver à la conclusion qu'il existe forcément des variables cachées locales. Il serait possible de les calculer en connaissant l'ensemble des propriétés ainsi que l'environnement local du système considéré. On parle alors de *réalisme local*.

Cependant, en 1964, John S. Bell affirme que le réalisme local n'est pas compatible avec la mécanique quantique, ou plus précisément avec le système quantique auquel croyait Einstein. Bell a avancé des modèles qui laissent apercevoir des limites dans le système du savant allemand (inégalités de Bell) mais qui ne sont pas valables dans le système quantique. Quelques années plus tard, John Clauser, Michael Horne, Abner Shimony, et Richard Holt ont donné une version plus compacte et simple des inégalités de Bell, alors appelée inégalité CHSH en référence aux noms des chercheurs.

## 1.2 Principe du jeu

Dans ce jeu, deux participants, communément nommés Alice (A) et Bob (B), sont séparés par un dispositif empêchant toute communication directe entre eux. Dans un premier temps, un arbitre présente séparément à chaque participant une valeur binaire (0 ou 1). On notera ici ces valeurs  $x$  pour Alice et  $y$  pour Bob. Les deux protagonistes doivent ensuite choisir une valeur binaire, que l'on appellera  $a$  et  $b$ , respectivement pour Alice et Bob. Bien sûr, Alice ne connaît pas la réponse de Bob, et inversement. Le jeu est gagné si  $a \oplus b = xy$ .

Par exemple, si  $x = y = 0$  et  $a = b = 1$ , Alice et Bob gagnent le jeu. En effet,  $a \oplus b = 1 \oplus 1 \equiv 2 \pmod{2} = 0$  et  $xy = 0 \cdot 0 = 0$ . On a donc bien  $a \oplus b = xy = 0$ .

**Remarque :** Soit  $t \in \{0, 1\}$ . Alors on peut écrire de manière équivalente  $a \oplus b = t$  et  $t \equiv a + b \pmod{2}$ . En analysant cette opération à travers l'algèbre de Boole, on se rend compte qu'il s'agit de la fonction XOR. De même,  $xy$  représente la fonction ET. La nature du jeu CHSH est donc de réussir à accorder le résultat d'une fonction ET avec celui d'une fonction XOR.

Alice et Bob ne peuvent choisir leur réponse qu'après une distribution des bits  $x$  et  $y$  par l'arbitre. Aussi, Alice et Bob ont la possibilité de se mettre d'accord sur une stratégie à adopter. L'arbitre est considéré comme complètement équitable, la valeur du bit n'est donc pas truquée.

L'objectif de ce rapport est ainsi de chercher à déterminer quelle stratégie maximisera les chances de victoire d'Alice et Bob. Plusieurs stratégies seront alors évaluées, chacune d'entre elles faisant appel à des concepts mathématiques différents.

---

<sup>1</sup>Courant de pensée dont les noms les plus connus sont Niels Bohr, Werner Heisenberg ou encore Pascual Jordan

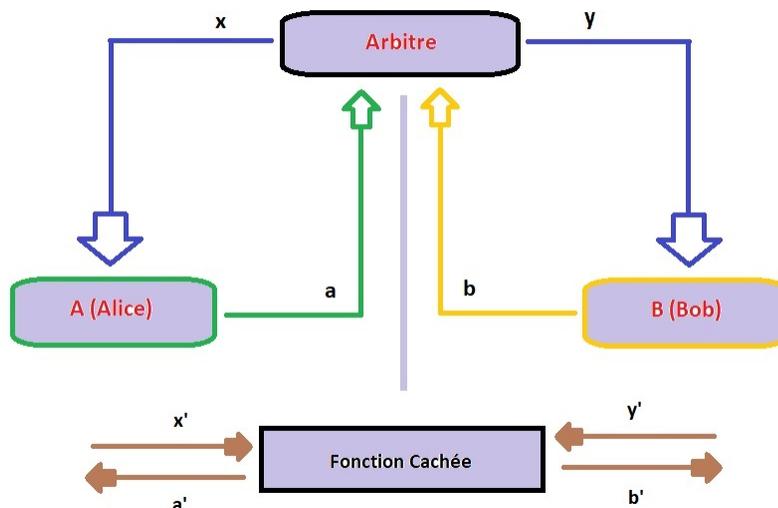


Figure 1: Modèle simplifié du jeu

## 2 Les stratégies de réalisme local

### 2.1 Stratégies déterministes et premières approches

Alice possède quatre choix pour renvoyer son bit :

$$\begin{cases} a = 1 \\ a = 0 \\ a = x \\ a = \bar{x} \end{cases}$$

Nous notons la stratégie adoptée  $g(x)$ . Le cas de Bob est rigoureusement identique, nous notons alors sa stratégie  $h(y)$ . On considère dans le cadre de cette approche déterministe que les joueurs choisissent une seule et unique stratégie (c'est-à-dire qu'ils ne peuvent pas en changer en cours de partie). Les répétitions du jeu étant parfaitement indépendantes les unes des autres, alterner de stratégie n'apporte aucun avantage.

Il existe quatre paires différentes de  $x$  et  $y$ , ce qui porte donc au total le nombre de possibilités de stratégies pour  $a$  et  $b$  à seize. Avec une stratégie déterministe, nous allons démontrer que le taux de réussite des joueurs ne peut excéder 75%. De fait, Alice et Bob perdent le jeu en moyenne une fois sur quatre.

Par contradiction, supposons que:

$$\begin{aligned} & \exists g : \{0; 1\} \rightarrow \{0; 1\} \text{ et } \exists h : \{0; 1\} \rightarrow \{0; 1\}: \\ & \forall \{x; y\} \in \{0; 1\}^2 : g(x) \oplus h(y) = xy \\ \Rightarrow 1 = 1.1 = h(1) \oplus g(1) &= (h(1) \oplus g(0)) \oplus (g(0) \oplus h(0)) \oplus (h(0) \oplus g(1)) = \\ & (1.0) \oplus (0.0) \oplus (0.1) = 0 \oplus 0 \oplus 0 = 0 \Rightarrow \text{Absurde} \end{aligned}$$

Par ailleurs, il est possible d'indiquer le cas perdant pour chacune des seize paires de stratégies (figure 2).

L'arbitre étant parfaitement équitable, la probabilité d'obtenir un couple  $(x; y)$  en particulier est équiprobable ( $\frac{1}{4} = 25\%$ ). Autrement dit, la chance de gagner le jeu pour Alice et Bob ne peut pas excéder 75%.

L'existence d'une stratégie où seule une paire  $(x; y)$  est perdante permet d'atteindre ce résultat. En effet, si Alice et Bob optent tous les deux pour la stratégie  $a = b = 0$ , il y aura alors pour les trois paires  $(0;0)$ ,  $(0;1)$ ,  $(1;0)$ ,  $xy = 0 = a \oplus b$ . D'où une chance maximale de  $\frac{3}{4} = 75\%$ .

$a \backslash b$	1	0	$x$	$\bar{x}$
1	(1;1)	(1;0)	(0;1)	(1;0)
0	(0;1)	(1;1)	(1;0)	(0;1)
$y$	(1;0)	(0;1)	(1;1)	(0;0)
$\bar{y}$	(0;1)	(1;0)	(0;0)	(1;1)

Figure 2: Sélection de paires  $(x; y)$  tel que le jeu CHSH est perdu

## 2.2 Stratégies probabilistes

Nous cherchons maintenant à généraliser les différentes stratégies par une approche probabiliste. On peut en effet définir de nouveaux événements qui détermineront la stratégie adoptée par Alice et Bob. On note alors  $\lambda$  et  $\gamma$  des variables locales cachées, qui ont donc un impact sur leur choix. Par exemple, le résultat d'un lancer de pièce, ou encore le module 4 du nombre d'arbres visibles par une fenêtre. On peut ainsi imaginer une stratégie où en cas d'un "pile" obtenu, Alice opte pour la stratégie  $f(x) = x$ , et Bob  $g(y) = 1$ .

Le nombre de stratégies ainsi que de paires  $(a; b)$  et  $(x; y)$  étant fini, nous pouvons définir des variables cachées telles que les supports de  $\lambda$  et  $\gamma$  soient des ensembles finis, que nous notons  $\Lambda$  et  $\Gamma$ . Enfin, nous posons l'évènement  $W$  : "Alice et Bob gagnent le jeu".

$$\begin{aligned} \text{Nous avons : } \mathbb{P}(W) &= \sum_{\substack{(x,y) \in \{0,1\}^2 \\ (\lambda,\gamma) \in \Lambda \times \Gamma}} \mathbb{P}(f(x, \lambda) \oplus g(y, \gamma) = xy) \\ &= \sum_{(\lambda,\gamma) \in \Lambda \times \Gamma} (\mathbb{P}(\lambda)\mathbb{P}(\gamma) \sum_{(x,y) \in \{0,1\}^2} \mathbb{P}(f(x, \lambda) \oplus g(y, \gamma) = xy)) \end{aligned}$$

Ici, avec  $(\lambda, \gamma) \in \Lambda \times \Gamma$  fixé,  $\mathbb{P}(f(x, \lambda) \oplus g(y, \gamma) = xy)$  représente la possibilité de gagner avec certaines paires de stratégie déterministe. Donc,  $\mathbb{P}(f(x, \lambda) \oplus g(y, \gamma) = xy) \leq 75\%$   
 $\Rightarrow \mathbb{P}(W) \leq 75\% \sum_{(\lambda,\gamma) \in \Lambda \times \Gamma} \mathbb{P}(\lambda)\mathbb{P}(\gamma) = 75\% \sum_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{P}(\lambda) \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{P}(\gamma) = 75\%.1.1 = 75\%$

Une approche probabiliste, comportant des variables locales qui permettent à Alice et Bob de choisir leur stratégie, ne permet donc pas d'améliorer nos chances de gagner à ce jeu.

## 2.3 Vérification empirique de nos résultats dans le cadre réaliste locale

La méthode que nous utilisons dans le cadre de ce rapport pour vérifier les affirmations précédentes est la répétition de jeu un grand nombre de fois (10 000) avec les différentes stratégies évoquées (déterministe et probabiliste) à l'aide d'algorithmes. La loi des grands nombres nous permet de trouver des résultats expérimentaux proches de ceux théoriques, avec une précision assez importante. Nous proposons à chaque fois une comparaison entre ces deux valeurs, dont nous espérons que la différence est toujours négligeable (inférieure à 1%).

Pour l'implémentation, nous utilisons Python. Les questions de l'arbitre sont modélisées par des valeurs aléatoires entre 0 et 1. Nous essayons dans un premier temps de simuler les chances de victoire en absence de stratégie (c'est-à-dire le cas où Alice et Bob renverraient des 1 et des 0 de manière aléatoire).

Ensuite, nous modéliserons l'approche déterministe avec un tableau similaire à la Figure 2, présentant chacune des seize stratégies possibles.

Enfin, nous simulerons à trois reprises des stratégies probabilistes. Nous présenterons la stratégie ainsi : Alice [U, V, W, T] où U représente le poids accordé à la stratégie  $f(x) = 1$ , V celui pour  $f(x) = 0$ , W celui pour  $f(x) = x$ , et T celui pour  $f(x) = \bar{x}$  (idem pour Bob).

```

Etage 1: Verifier avec stratégie aléatoire
Le valeur expecté pour stratégies aléatoire est: 51.15%
Etage 2: Verifier avec stratégie deterministe:
74.77% / 75  25.52% / 25  74.82% / 75  25.03% / 25
25.77% / 25  75.42% / 75  25.83% / 25  74.76% / 75
76.62% / 75  25.03% / 25  26.05% / 25  75.53% / 75
25.35% / 25  75.35% / 75  75.37% / 75  24.99% / 25
Etage 3: Verifier avec stratégie classique:
1er fois:
Le possibilité estimé pour le distribution de stratégies de Alice [74, 53, 64, 10] et Bob [97, 43, 93, 44] est 51.09%
La possibilité dans l'expérience: 51.37
2eme fois:
Le possibilité estimé pour le distribution de stratégies de Alice [9, 14, 7, 29] et Bob [87, 53, 53, 96] est 47.58%
La possibilité dans l'expérience: 47.24
3eme fois:
Le possibilité estimé pour le distribution de stratégies de Alice [76, 18, 35, 99] et Bob [91, 87, 77, 11] est 53.3%
La possibilité dans l'expérience: 52.62

```

Figure 3: Vérification avec programme

Les résultats sont ici à considérer avec du recul. Ils ne peuvent modéliser parfaitement les stratégies, de par le nombre limité de répétition du nombre d'expériences, ainsi que par les choix que nous avons effectué pour approcher ces derniers.

## 3 La stratégie quantique

### 3.1 Préquis mathématiques

#### 3.1.1 Qubit

Le bit ordinaire existe sous la forme 0 ou 1, assimilable aux valeurs extrêmes des fonctions sinus et cosinus. Le *qubit* (quantum bit en anglais) a été créé pour généraliser le bit classique à d'autres espaces. Il s'agit d'un vecteur de norme euclidienne 1 dans  $\mathbb{C}^2$ .

#### 3.1.2 Notation de Dirac (1/3)

Évidemment, les vecteurs dans la base canonique de  $\mathbb{C}^2$  sont des qubits (puisque'ils sont de norme euclidienne 1). Paul Dirac propose la notation  $|0\rangle := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $|1\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  pour ces derniers. De plus, un qubit  $|\psi\rangle$  peut s'écrire sous la forme  $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des nombres complexes tels que  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ .

**Exemple:**

$|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$  est un qubit car  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$  et  $|\frac{1}{\sqrt{2}}|^2 + |\frac{1}{\sqrt{2}}|^2 = 1$ .

$|-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$  est un qubit car  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\beta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$  et  $|\frac{1}{\sqrt{2}}|^2 + |-\frac{1}{\sqrt{2}}|^2 = 1$ .

#### 3.1.3 État quantique

Un *état quantique* est une généralisation du concept de qubit. C'est un vecteur de norme 1 dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Désormais, nous posons  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ .

**Remarque :** Un espace de Hilbert est un espace complet<sup>2</sup> et muni d'un produit scalaire. Un qubit est un état quantique avec  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ .

#### 3.1.4 Superposition quantique:

Comme pour un qubit, un état quantique peut se décomposer dans une base orthonormée (BON) de  $\mathcal{H}$  (BON). Par exemple, soit  $\{|e_1\rangle, \dots, |e_n\rangle\}$  une BON de  $\mathcal{H}$  et  $|\psi\rangle$ . Donc,  $\exists(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$  tels que  $|\psi\rangle = \alpha_1|e_1\rangle + \dots + \alpha_n|e_n\rangle$ . Dans ce cas, on dit que  $|\psi\rangle$  est une *superposition quantique* des états  $|e_1\rangle, \dots, |e_n\rangle$ . La probabilité d'être dans l'état  $|e_i\rangle$  pour  $i = \overline{1, n}$  est  $|a_i|^2$ .

**Remarque:** Parce que la base est orthonormée, un état quantique est de norme 1 ( $\sum_{i=1, n} |a_i|^2 = 1$ ). Nous avons bien la somme des probabilités ici égale à 1.

<sup>2</sup>Espace dans lequel toute suite de Cauchy dans l'espace converge vers un point dans le même espace, c'est-à-dire une espace sans "trou".

**Exemple :**  $\frac{1}{3}|e_1\rangle + \frac{1}{4}|e_2\rangle + \frac{\sqrt{119}}{12}|e_3\rangle$  est un état quantique de  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^3$  car  $|\frac{1}{3}|^2 + |\frac{1}{4}|^2 + |\frac{\sqrt{119}}{12}|^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{119}{144} = 1$ .

On remarque par ailleurs que  $\frac{-\sqrt{119}}{12}$  était aussi un coefficient possible pour  $|e_3\rangle$ .

### 3.1.5 Observable quantique

Une *observable quantique*, c'est-à-dire l'équivalent en mécanique quantique d'une grandeur physique en mécanique classique, peut être modélisée par une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $A = A^*$ , où  $A^*$  est définie comme la *matrice adjointe* de  $A$  (i.e  $A^* := \overline{A^T}$ ). Nous qualifions une telle matrice  $A$  d'*auto-adjointe* (ou encore *Hermitienne*). L'observable possède des propriétés dont nous avons besoin pour mesurer un système.

**Theorème :** Une matrice auto-adjointe est toujours diagonalisable en BON, et ses valeurs propres sont réelles. En d'autres termes, elle admet toujours des valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  et des vecteurs propres  $|v_1\rangle, |v_2\rangle, \dots, |v_n\rangle$  qui forment une BON de  $\mathcal{H}$ .

*Preuve :* Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $A = A^*$ . D'après le théorème de décomposition de Schur, si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  alors  $\exists(P, U) \in \mathcal{M}_n^2(\mathbb{C})$  telle que  $A = PUP^{-1}$  avec  $P^* = P^{-1}$ , et  $U$  une matrice triangulaire supérieure.

Donc:  $A^* = (\overline{PUP^{-1}})^T = \overline{P^{-1}}^T \cdot \overline{U}^T \cdot \overline{P}^T = (P^{-1})^{-1} \cdot U^* \cdot P^{-1} = PU^*P^{-1} = A = PUP^{-1}$ .

$P$  étant inversible, on a alors  $U = U^*$ , donc  $U$  est une matrice diagonale et les éléments de sa diagonale (i.e ses valeurs propres) sont réelles car égales à leurs valeurs conjuguées.

Nous notons alors :  $A = \sum_{i=1}^k \lambda_i P_i$  avec  $k \leq n$ ,  $\lambda_i$  des réels deux à deux distincts,  $P_i \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

les projections orthogonales sur les sous-espaces propres  $E_{\lambda_i}$ . Les matrices  $P_i$  sont appelées *projecteurs spectraux*.

### 3.1.6 Valeurs d'une observable

Pour une observable  $A$ , les valeurs propres  $\lambda_i$  modélisent les différentes valeurs possibles des propriétés du système que nous avons besoin de mesurer. Par exemple, le niveau d'énergie de l'excitation d'un électron.

### 3.1.7 Mesurer la valeur d'une observable

En mécanique quantique, lorsque l'on mesure la valeur d'une observable, nous n'obtenons pas un résultat "déterministe". En effet, le résultat est distribué aléatoirement parmi les différentes valeurs possibles.

On note  $A_{\lambda_i}$  l'évènement : "Observer la valeur  $\lambda_i$  d'une observable  $A$  à partir d'un état  $|\psi\rangle$ ". La loi de probabilité est alors :  $P(A_{\lambda_i}) := \|P_i|\psi\rangle\|_2^2$ .

### 3.1.8 Notation de Dirac (2/3)

Nous définissons l'application  $\langle\psi| : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  telle que :  $\langle\psi|\psi\rangle = \|\psi\|_2^2$ . En d'autres termes,  $\langle\psi| = |\psi\rangle^*$ . La fonction  $\langle\psi|$  est parfois appelée le *dual* de  $v_i$ .

### 3.1.9 Réduction du paquet d'ondes

En mécanique quantique, l'état d'un système change lorsque ce dernier est mesuré. Un exemple connu de cette propriété mène à la description de la dualité onde-particule de la lumière. La propriété d'un rayon change selon les différentes méthodes employées pour le mesurer.

Après avoir mesuré l'observable  $A$  sur un état  $|\psi\rangle$  et obtenu une valeur  $\lambda_i$  au hasard, l'état  $|\psi\rangle$  est instantanément transformé en :  $|\tilde{\psi}_i\rangle := \frac{P_i|\psi\rangle}{\|P_i|\psi\rangle\|}$ . Ce phénomène s'appelle la *réduction du paquet d'ondes*.

Autrement dit, une autre mesure de l'observable  $A$ , réalisée a posteriori donc, ne donnera plus une valeur aléatoire mais bien la valeur  $\lambda_i$  mesurée précédemment. Pour faire un parallèle avec la célèbre expérience de pensée de Erwin Schrödinger, il est possible de connaître avec certitude (et de "figer") l'état de son chat en ouvrant la boîte.

**Exemple :**

- $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2i-1 \\ -2i-1 & 3 \end{bmatrix}$  est auto-adjointe donc  $A_1$  est bien une observable quantique.  
 $P_{A_1}(x) = (x-2+\sqrt{6})(x-2-\sqrt{6})$  donc  $A_1$  a 2 valeurs propres  $2-\sqrt{6}$  et  $2+\sqrt{6}$ .  
 Nous avons  $E_{2+\sqrt{6}} = Vect((-1+\sqrt{6}, -2i-1)^T) = Vect(v_1)$  et  $E_{2-\sqrt{6}} = Vect((-1-$

$$\sqrt{6}, -2i - 1)^T) = Vect(v_2) .$$

$$\text{Aussi : } A_1 = (2 + \sqrt{6})P_{2+\sqrt{6}} + (2 - \sqrt{6})P_{2-\sqrt{6}}$$

$$\text{où } P_{2+\sqrt{6}} = \frac{1}{\|v_1\|_2^2} v_1 v_1^* = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 + \sqrt{6} & 2i - 1 \\ -2i - 1 & 1 + \sqrt{6} \end{bmatrix} \text{ et}$$

$$P_{2-\sqrt{6}} = \frac{1}{\|v_2\|_2^2} v_2 v_2^* = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{6} & -2i + 1 \\ 2i + 1 & \sqrt{6} - 1 \end{bmatrix} .$$

$$\text{Donc } \mathbb{P}(2 + \sqrt{6}) = \|P_{2+\sqrt{6}} |+\rangle\|_2^2 = \frac{6-\sqrt{6}}{12} \cdot 100\% = 29, 59\% .$$

$$\text{De même, } \mathbb{P}(2 - \sqrt{6}) = \|P_{2-\sqrt{6}} |+\rangle\|_2^2 = \frac{6+\sqrt{6}}{12} \cdot 100\% = 70, 41\% .$$

$$\text{Si nous obtenons } 2+\sqrt{6}, \text{ l'état quantique devient } |\psi_{2+\sqrt{6}}^{\sim}\rangle = \frac{P_{2+\sqrt{6}}|\psi\rangle}{\|P_{2+\sqrt{6}}|\psi\rangle\|} = \frac{1}{4\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \sqrt{6} - 2 + 2i \\ -2i + \sqrt{6} \end{bmatrix} .$$

$$\text{Au contraire, si nous mesurons } 2-\sqrt{6}, \text{ l'état quantique devient } |\psi_{2-\sqrt{6}}^{\sim}\rangle = \frac{P_{2-\sqrt{6}}|\psi\rangle}{\|P_{2-\sqrt{6}}|\psi\rangle\|} =$$

$$\frac{1}{4\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \sqrt{6} + 2 - 2i \\ 2i + \sqrt{6} \end{bmatrix} .$$

- $A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 5i & 2-i \\ -5i & 1 & 0 \\ 2+i & 0 & 1 \end{bmatrix}$  est auto-adjointe donc  $A_2$  est bien une observable quantique.

$$P_{A_2}(x) = -(x-2-\sqrt{31})(x-2+\sqrt{31})(x-1) \text{ donc } A_2 \text{ a 3 valeurs propres, } 2 \pm \sqrt{31} \text{ et } 1 .$$

$$\text{Nous avons: } E_1 = Vect((0, 2-i, 5i)^T) = Vect(v_1), E_{2-\sqrt{31}} = Vect((1-\sqrt{31}, -5i, 2+i)^T) = Vect(v_2), \text{ et } E_{2+\sqrt{31}} = Vect((1+\sqrt{31}, -5i, 2+i)^T) = Vect(v_3) .$$

$$\text{Aussi, } A_2 = P_1 + (2 + \sqrt{31})P_{2+\sqrt{31}} + (2 - \sqrt{31})P_{2-\sqrt{31}}$$

$$\text{, où } P_1 = \frac{1}{\|v_1\|_2^2} v_1 v_1^* = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -10i - 5 \\ 0 & 10i - 5 & 25 \end{bmatrix}$$

$$P_{2-\sqrt{31}} = \frac{1}{\|v_2\|_2^2} v_2 v_2^* = \frac{1}{2\sqrt{31}(\sqrt{31}-1)} \begin{bmatrix} 32 - 2\sqrt{31} & 5i(1 - \sqrt{31}) & (2-i)(1 - \sqrt{31}) \\ 5i(\sqrt{31} - 1) & 25 & -5 - 10i \\ (2+i)(1 - \sqrt{31}) & 10i - 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$P_{2+\sqrt{31}} = \frac{1}{\|v_3\|_2^2} v_3 v_3^* = \frac{1}{2\sqrt{31}(\sqrt{31}+1)} \begin{bmatrix} 32 + 2\sqrt{31} & 5i(1 + \sqrt{31}) & (2-i)(1 + \sqrt{31}) \\ 5i(\sqrt{31} + 1) & 25 & -5 - 10i \\ (2+i)(1 + \sqrt{31}) & 10i - 5 & 5 \end{bmatrix} .$$

- $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  est auto-adjointe,  $A_3$  est bien une observable quantique.

$$P_{A_3} = (3 - t)t^2 \text{ donc } A_3 \text{ a deux valeurs propres : } 0 \text{ (valeur propre double) et } 3 .$$

$$\text{Après calcul, } E_0 = Vect((1, 0, -1)^T, (0, 1, -1)^T) = Vect(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})^T, \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)^T) = Vect(v_1, v_2), \text{ et } E_3 = Vect(\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T) = Vect(v_3) .$$

$$\text{Donc: } A_3 = 0.P_0 + 3.P_3, \text{ où } P_3 = v_3 v_3^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{et } P_0 = Q.Q^* = [v_1 \ v_2] [v_1 \ v_2]^* = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} .$$

**Theorème :** Quand les valeurs mesurables  $\lambda_i$  sont deux-à-deux distinctes, nous pouvons simplifier l'expression comme suit :

$$P(A_{\lambda_i}) = |\langle v_i | \psi \rangle|^2, \text{ où } |v_i\rangle \text{ est un vecteur propre normé associé à } \lambda_i .$$

Preuve:  $P_i |\psi\rangle = Proj_{Vect(|v_i\rangle)}(|\psi\rangle) = \langle v_i | \cdot |\psi\rangle |v_i\rangle = (\langle v_i | \psi \rangle) |v_i\rangle$ . Parce que  $(\langle v_i | \psi \rangle)$  est une valeur propre et  $|v_i\rangle$  est un vecteur unitaire, alors  $|P_i |\psi\rangle| = |\langle v_i | \psi \rangle|$  où  $|P_i |\psi\rangle|^2 = |\langle v_i | \psi \rangle|^2$ .

### 3.1.10 Produit tensoriel

En physique, le *produit tensoriel*  $\otimes$  modélise la notion d'*indépendance* entre des sous-systèmes. Par exemple, si l'on étudie le mouvement de la Lune et de Mars et que l'on

suppose que leur mouvement sont indépendants l'un de l'autre, on étudie en fait le mouvement du système Lune  $\otimes$  Mars.

Pour la notation matricielle, si l'on a deux matrices  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$  et  $B \in \mathcal{M}_{p \times q}(\mathbb{C})$ , alors leur produit tensoriel est noté  $A \otimes B \in \mathcal{M}_{mp \times nq}(\mathbb{C})$ , ce qui donne avec la notation de matrice par blocs :

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

$$\text{Exemple : } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 7-i \\ i & -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A \otimes B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 7-i & 8 & 4 & 14-2i \\ i & -1 & 2 & 2i & -2 & 4 \\ 12 & 6 & 21-3i & 16 & 8 & 28-4i \\ 3i & -3 & 6 & 4i & -4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} 2i \\ -3 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow u \otimes v = \begin{bmatrix} 0 \\ 4i \\ 6i \\ 0 \\ -6 \\ -9 \end{bmatrix}$$

### Propriétés de produit tensoriel

- *Multiplication avec un vecteur* : Soient des matrices  $A, B$  et des vecteurs  $v, w$ , tels que  $(Av, Bw) \in \mathcal{M}^2$ , alors on a  $(A \otimes B)(v \otimes w) = (Av) \otimes (Bw)$ .
- *Produit scalaire d'un produit tensoriel* :  $\langle a \otimes b | c \otimes d \rangle = \langle a | c \rangle \langle b | d \rangle$ .
- *Bilinéarité du produit scalaire* :  $(\sum_i \alpha_i A_i) \otimes (\sum_j \beta_j B_j) = \sum_{ij} \alpha_i \beta_j (A_i \otimes B_j)$ .
- *Produit tensoriel d'espaces de Hilbert* : Soient  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{H}'$  des espaces de Hilbert. On a alors :  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}' := \text{Vect}\{|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle : |\psi\rangle \in \mathcal{H}, |\phi\rangle \in \mathcal{H}'\}$ . Autrement dit, c'est un espace vectoriel engendré par les produits tensoriels de vecteurs de deux espaces fournis.
- *Norme de produit tensoriel* : De la définition même du produit tensoriel, nous pouvons conclure que  $\|A \otimes B\|_2 = \|A\|_2 \|B\|_2$ .

### 3.1.11 État intriqué

Un état  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$  est dit *séparable* s'il peut s'écrire sous la forme  $|\Psi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle$  avec  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  et  $|\varphi\rangle \in \mathcal{H}'$ . Si ce n'est pas possible, alors on dit que  $|\Psi\rangle$  est *intriqué*.

### 3.1.12 Notation de Dirac (3/3)

L'état  $|0\rangle \otimes |0\rangle$  est simplement noté  $|00\rangle$ , de même l'état  $|1\rangle \otimes |1\rangle$  est simplement noté  $|11\rangle$ .

Nous pouvons remarquer que l'état  $|\Omega\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$  est un état intriqué. Tout

$$\text{d'abord, } |\Omega\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \text{ et } \|\Omega\|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \quad |\Omega\rangle \text{ est un état quantique.}$$

Par l'absurde, nous supposons que  $\Omega$  est séparable. Donc,  $\exists(A, B) \in (\mathbb{C}^2)^2$  telle que  $|\Omega\rangle = A \otimes B$ . Nous notons  $A = a_1 e_1 + a_2 e_2, B = b_1 e_1 + b_2 e_2$  (décomposition dans la base canonique). Donc,  $a_1 b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$  et  $a_1, b_1$  ne sont pas nuls. Idem,  $a_2, b_2$  ne sont pas nuls. Cependant,  $a_1 b_2 = 0$  ce qui est absurde. Donc  $|\Omega\rangle$  est un état intriqué.

Cependant, l'état  $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle \otimes |1\rangle$ , lui aussi quantique (normé unitaire), est séparable :  $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle \otimes (|0\rangle + |1\rangle)$ .

### 3.1.13 Puissance et utilité de l'intrication quantique

L'état intriqué  $\Omega$  ci-dessus est composé de deux particules : l'une dans  $\mathcal{H}$  et l'autre dans  $\mathcal{H}'$ . Si Alice mesure l'état de sa particule en obtenant  $\lambda_i$ , l'état des deux particules changent simultanément d'après le principe de réduction du paquet d'ondes. Cependant, nous ne

pouvons pas attacher d'informations sur cet événement. Parler de "communication" serait alors un abus de langage.

## 3.2 Jeu CHSH

### 3.2.1 Calculs préliminaires

Avant de réellemnt commencer à trouver une stratégie quantique efficace pour gagner au jeu CHSH, il est nécessaire de présenter plusieurs résultats.

- Tout d'abord, nous pouvons remarquer que  $\cos^2(\frac{\pi}{8}) = \frac{1+\cos(\frac{\pi}{4})}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ .

- En considérant les matrices suivantes :  $M := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , et  $A_\theta := \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ ,

$M_\theta := A_\theta M A_\theta^{-1}$  où  $\theta$  est un paramètre réel, nous avons alors :

$$\begin{aligned} A_\theta A_\theta^T &= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \theta + \sin \theta \sin \theta & \cos \theta(-\sin \theta) + \sin \theta \cos \theta \\ (-\sin \theta) \cos \theta + \cos \theta \sin \theta & (-\sin \theta)(-\sin \theta) + \cos \theta \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Donc  $A_\theta^{-1} = A_\theta^T$ .

Nous avons :  $(M, A_\theta) \in \mathcal{M}(\mathbb{R})^2$  donc  $M_\theta \in \mathcal{M}(\mathbb{R}) \Rightarrow M_\theta^* = M_\theta^T = (A_\theta M A_\theta^{-1})^T = (A_\theta^{-1})^T M^T (A_\theta)^T = (A_\theta^T)^T M^T A_\theta^{-1} = A_\theta M (A_\theta)^{-1} = M_\theta$ .

Donc  $M_\theta$  est bien un observable quantique.

$M$  a deux valeurs propres, 0 et 1, donc  $M_\theta$  possèdent les mêmes, que nous notons  $\lambda_0$  et  $\lambda_1$  par commodité.

$$\text{D'où } M = \lambda_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1$$

$$\Rightarrow M_\theta = A_\theta M A_\theta^{-1} = A_\theta M A_\theta^T = \lambda_0 A_\theta P_0 A_\theta^T + \lambda_1 A_\theta P_1 A_\theta^T = \lambda_0 Q_0^\theta + \lambda_1 Q_1^\theta$$

$$\text{où } Q_0^\theta = A_\theta P_0 A_\theta^T = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta \end{bmatrix}, \text{ et}$$

$$Q_1^\theta = A_\theta P_1 A_\theta^T = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix}.$$

- Appliquons l'observable  $M_\theta$  à l'état  $|\psi\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

Nous avons précédemment démontré que  $|\psi\rangle$  est un état quantique. La possibilité d'obtenir  $\lambda_0$  est alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\lambda_0) &= \|Q_0^\theta |\psi\rangle\|^2 = \left\| \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|^2 = \frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} \sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \end{bmatrix} \right\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \{(\sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta)^2 + (\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta)^2\} = \frac{1}{2} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) (\sin \theta + \cos \theta)^2 = \\ &= \frac{1}{2} (\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) = \frac{1}{2} (1 + \sin 2\theta) = \frac{1+\sin 2\theta}{2}. \end{aligned}$$

De même, la possibilité d'obtenir  $\lambda_1$  est :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\lambda_1) &= \|Q_1^\theta |\psi\rangle\|^2 = \left\| \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|^2 = \frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} \cos^2 \theta - \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta \end{bmatrix} \right\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \{(\cos^2 \theta - \sin \theta \cos \theta)^2 + (-\sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta)^2\} = \frac{1}{2} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) (\sin \theta - \cos \theta)^2 = \\ &= \frac{1}{2} (\sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) = \frac{1}{2} (1 - \sin 2\theta) = \frac{1-\sin 2\theta}{2}. \end{aligned}$$

$\mathbb{P}(\lambda_0) + \mathbb{P}(\lambda_1) = \frac{1+\sin 2\theta}{2} + \frac{1-\sin 2\theta}{2} = 1$ , la somme des probabilités est bien égale à 1.

- Comme nous l'avons démontré précédemment,  $|\Omega\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$  est un état quantique intriqué.

Aussi  $(M_\theta, I_2) \in \mathcal{M}(\mathbb{R})^2$ , donc  $M_\theta \otimes I_2 \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ .

**Remarque :** On rappelle que  $I_n$  est la matrice identique de dimension  $n \times n$ .

Notons  $N = M_\theta \otimes I_2 \Rightarrow N^* = N^T$ .

Nous avons:  $N = \begin{bmatrix} M_\theta^{11} I_2 & M_\theta^{12} I_2 \\ M_\theta^{21} I_2 & M_\theta^{22} I_2 \end{bmatrix} = N^T = N^*$

En effet,  $(M_\theta^{11} I_2)^T = M_\theta^{11} I_2$ ,  $(M_\theta^{12} I_2)^T = M_\theta^{21} I_2$  (car  $M_\theta^{12} = M_\theta^{21}$ )  
et  $(M_\theta^{22} I_2)^T = M_\theta^{22} I_2$  et  $M_\theta^{11} I_2, M_\theta^{21} I_2, M_\theta^{12} I_2, M_\theta^{22} I_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

**Remarque :** Prenons la matrice  $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$  où  $A \in \mathcal{M}_n, D \in \mathcal{M}_m$ . On a

alors  $M^T = \begin{bmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{bmatrix}$ .

On peut alors remarquer que :  $N = (A_\theta M A_\theta^{-1}) \otimes I_2 = (A_\theta \otimes I_2)(M \otimes I_2)(A_\theta^{-1} \otimes I_2) = M \otimes I_2$ .

En effet,  $(A_\theta \otimes I_2)(A_\theta^{-1} \otimes I_2) = (A_\theta A_\theta^{-1}) \otimes I_2 = I_2 \otimes I_2 = I_4$ .

$M \otimes I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  a deux valeurs propres 0 et 1 ( $\lambda_0$  et  $\lambda_1$ )

donc  $N = M_\theta \otimes I_2$  a les même valeurs propres  $\lambda_0$  et  $\lambda_1$ .

De plus,  $N = M_\theta \otimes I = (A_\theta \otimes I_2)(M \otimes I_2)(A_\theta^{-1} \otimes I_2)$   
 $= (A_\theta \otimes I_2)(\lambda_0 P_0 \otimes I_2 + \lambda_1 P_1 \otimes I_2)(A_\theta^{-1} \otimes I_2)$   
 $= \lambda_0 (A_\theta \otimes I_2)(P_0 \otimes I_2)(A_\theta^{-1} \otimes I_2) + \lambda_1 (A_\theta \otimes I_2)(P_1 \otimes I_2)(A_\theta^{-1} \otimes I_2)$   
 $= \lambda_0 (A_\theta P_0 A_\theta^{-1}) \otimes I_2 + \lambda_1 (A_\theta P_1 A_\theta^{-1}) \otimes I_2 = \lambda_0 Q_0^\theta \otimes I_2 + \lambda_1 Q_1^\theta \otimes I_2$

$\Rightarrow \mathbb{P}_{N,|\omega\rangle}(\lambda_0) = \|(Q_0^\theta \otimes I_2)|\omega\rangle\|_2^2 = \|(Q_0^\theta \otimes I_2)((\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle) \otimes (\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle))\|_2^2$   
 $= \frac{1}{4} \|(Q_0^\theta(|0\rangle + |1\rangle)) \otimes (I_2(|0\rangle + |1\rangle))\|_2^2 = \frac{1}{4} \|(Q_0^\theta(|0\rangle + |1\rangle)) \otimes (|0\rangle + |1\rangle)\|_2^2$   
 $= \|(Q_0^\theta(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle))\|_2^2 \|( \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \|_2^2 = \mathbb{P}_{M_\theta,|\psi\rangle}(\lambda_0)$ .

En effet, si  $|\omega\rangle = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$  pour tout état quantique  $|\psi\rangle$ , nous avons  $\mathbb{P}_{N,|\omega\rangle}(\lambda_0) = \|(M_\theta \otimes I_2)(|\psi\rangle \otimes |\psi\rangle)\|_2^2 = \|(M_\theta |\psi\rangle) \otimes (I_2 |\psi\rangle)\|_2^2 = \|M_\theta |\psi\rangle\|_2^2 \|I_2 |\psi\rangle\|_2^2 = \mathbb{P}_{M_\theta,|\psi\rangle}(\lambda_0) \|\psi\|_2^2 = \mathbb{P}_{M_\theta,|\psi\rangle}(\lambda_0)$ .

Idem pour  $\mathbb{P}_{N,|\omega\rangle}(\lambda_1) = \mathbb{P}_{M_\theta,|\psi\rangle}(\lambda_1)$ .

Ainsi,  $\mathbb{P}(\lambda_0|\theta = 0) = \frac{1+\sin(2.0)}{2} = \frac{1}{2}$   
 $\mathbb{P}(\lambda_0|\theta = \frac{\pi}{4}) = \frac{1+\sin(2\frac{\pi}{4})}{2} = \frac{2}{2} = 1$   
 $\mathbb{P}(\lambda_1|\theta = 0) = \frac{1-\sin(2.0)}{2} = \frac{1}{2}$   
 $\mathbb{P}(\lambda_1|\theta = \frac{\pi}{4}) = \frac{1-\sin(2\frac{\pi}{4})}{2} = \frac{0}{2} = 0$ .

### 3.2.2 Protocole

Revenons-en au jeu CHSH, et considérons que l'état intriqué  $|\Omega\rangle$  représente deux particules dans l'espace  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ . Le premier espace  $\mathbb{C}^2$  est alors celui associé à Alice, et le deuxième  $\mathbb{C}^2$  est celui associé à Bob. Sans perte de généralité, disons qu'Alice commence à mesurer sa particule. Si elle souhaite mesurer une observable  $A$  sur sa particule, elle doit en réalité mesurer l'observable  $A \otimes I$  sur l'état totale  $|\Omega\rangle$ .

**a.** Une fois qu'Alice a reçu son bit  $x$  de la part de l'arbitre, elle choisit  $\theta = 0$  lorsque  $x = 0$ , ou bien  $\theta = \frac{\pi}{4}$  lorsque  $x = 1$ . Elle mesure ensuite l'observable  $M_\theta \otimes I$  sur l'état  $|\Omega\rangle$ , et elle note  $a$  le resultat obtenu, qui représente l'information qu'elle retournera à l'arbitre.

Nous avons alors :  $\mathbb{P}(a = 0|x = 0) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(a = 1|x = 0) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(a = 0|x = 1) = 1$  et enfin  $\mathbb{P}(a = 1|x = 1) = 0$ .

**b.** Immédiatement après la mesure d'Alice, l'état quantique change d'après le principe de *réduction du paquet d'onde*. Le nouvel état devient alors :

$$|\hat{\Omega}_x^a\rangle := \frac{(Q_x^a \otimes I)|\Omega\rangle}{\|(Q_x^a \otimes I)|\Omega\rangle\|}$$

- Lorsque  $x = 0, a = 0 \Rightarrow \theta = 0$  :

$$\begin{aligned}
Q_0^0 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |\tilde{\Omega}_{x=0}^{a=0}\rangle = \frac{(Q_0^0 \otimes I)|\Omega\rangle}{\|(Q_0^0 \otimes I)|\Omega\rangle} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}\|(Q_0^0 \otimes I)|\Omega\rangle} \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}\|(Q_0^0 \otimes I)|\Omega\rangle} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}\|(Q_0^0 \otimes I)|\Omega\rangle} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2}}} |11\rangle = |11\rangle.
\end{aligned}$$

- Lorsque  $x = 0$ ,  $a = 1 \Rightarrow \theta = 0$  :

$$\begin{aligned}
Q_1^0 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow |\tilde{\Omega}_{x=0}^{a=1}\rangle = \frac{(Q_1^0 \otimes I)|\Omega\rangle}{\|(Q_1^0 \otimes I)|\Omega\rangle} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}\|(Q_1^0 \otimes I)|\Omega\rangle} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}\|(Q_1^0 \otimes I)|\Omega\rangle} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}\|(Q_1^0 \otimes I)|\Omega\rangle} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2}}} |00\rangle = |00\rangle.
\end{aligned}$$

- Lorsque  $x = 1$ ,  $a = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$  :

$$\begin{aligned}
Q_0^{\frac{\pi}{4}} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow |\tilde{\Omega}_{x=1}^{a=0}\rangle = \frac{(Q_0^{\frac{\pi}{4}} \otimes I)|\Omega\rangle}{\|(Q_0^{\frac{\pi}{4}} \otimes I)|\Omega\rangle} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}\|(Q_0^{\frac{\pi}{4}} \otimes I)|\Omega\rangle} \left( \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}\|(Q_0^{\frac{\pi}{4}} \otimes I)|\Omega\rangle} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}\|(Q_0^{\frac{\pi}{4}} \otimes I)|\Omega\rangle} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2} \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2}}} (|0\rangle + |1\rangle) \otimes (|0\rangle + |1\rangle) = \\
&\frac{1}{2} (|0\rangle + |1\rangle) \otimes (|0\rangle + |1\rangle).
\end{aligned}$$

- Lorsque  $x = 1$ ,  $a = 1$ , nous n'avons pas besoins de calculer  $\tilde{\Omega}_{x=1}^{a=1}$  car  $\mathbb{P}(\lambda_1|\theta = \frac{\pi}{4}) = \mathbb{P}(a = 1|x = 1) = 0$ .

c. C'est ensuite au tour de Bob de mesurer sa particule. Pour rappel, la réduction de paquet d'onde a figé son état. Il choisit d'adopter la même stratégie qu'Alice, à l'exception de l'angle  $\theta = \frac{\pi}{8}$  pour lequel  $y = 0$ , ainsi que l'angle  $\theta = -\frac{\pi}{8}$  alors associé à  $y = 1$  (pour la matrice  $M_\theta \otimes I_2$ ). Il note alors  $b$  le résultat obtenu, qui est l'information qu'il renvoie à l'arbitre.

Nous avons démontré que la possibilité d'obtenir  $b = 0$  est égale à  $\frac{1+\sin(2\theta)}{2}$ , idem pour celle associée à  $b = 1$  qui est alors égale à  $\frac{1-\sin(2\theta)}{2}$ . Avec des angles prédéfinis, nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(b = 0|y = 0, x = 1, a = 0) &= \frac{1 + \sin \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} = \cos^2 \frac{\pi}{8} \\
\mathbb{P}(b = 0|y = 1, x = 1, a = 0) &= \frac{1 + \sin(-\frac{\pi}{4})}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{8} \\
\mathbb{P}(b = 1|y = 0, x = 1, a = 0) &= \frac{1 - \sin \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{8} \\
\mathbb{P}(b = 1|y = 1, x = 1, a = 0) &= \frac{1 - \sin(-\frac{\pi}{4})}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} = \cos^2 \frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

- d. Dans le cas où  $x = 0$ ,  $a = 0 \Rightarrow \Psi = |1\rangle$ , la probabilité d'obtenir  $b = \lambda_0 = 0$  est

$$\begin{aligned}
\text{alors } \left\| \begin{bmatrix} \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|_2^2 &= \|M_\theta |1\rangle\|_2^2 = \left\| \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \theta \\ \cos^2 \theta \end{bmatrix} \right\|_2^2 = \\
\sin^2 \theta \cos^2 \theta + \cos^4 \theta &= \cos^2 \theta (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = \cos^2 \theta.
\end{aligned}$$

La probabilité d'obtenir  $b = \lambda_1 = 1$  est donc  $1 - \cos^2 \theta$ .

Avec l'angle prédéfini, nous avons :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(b = 0|y = 0, x = 0, a = 0) &= \cos^2 \frac{\pi}{8} \\ \mathbb{P}(b = 0|y = 1, x = 0, a = 0) &= \cos^2 \left(-\frac{\pi}{8}\right) = \cos^2 \frac{\pi}{8} \\ \mathbb{P}(b = 1|y = 0, x = 0, a = 0) &= 1 - \cos^2 \frac{\pi}{8} \\ \mathbb{P}(b = 1|y = 1, x = 0, a = 0) &= 1 - \cos^2 \left(-\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{8}\end{aligned}$$

e. Dans le cas où  $x = 0, a = 1 \Rightarrow \Psi = |0\rangle$ , la probabilité d'obtenir  $b = \lambda_0 = 0$  est

$$\begin{aligned}\text{alors } \left\| \begin{bmatrix} \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| &= \|M_\theta |1\rangle\|_2^2 = \left\| \begin{bmatrix} \sin^2 \theta \\ \cos \theta \sin \theta \end{bmatrix} \right\|_2^2 = \\ \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \sin^4 \theta &= \sin^2 \theta (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta.\end{aligned}$$

La probabilité d'obtenir  $b = \lambda_1 = 1$  est donc de  $\cos^2 \theta$ .

Avec l'angle prédéfini, nous avons :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(b = 0|y = 0, x = 0, a = 0) &= 1 - \cos^2 \frac{\pi}{8} \\ \mathbb{P}(b = 0|y = 1, x = 0, a = 0) &= 1 - \cos^2 \left(-\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{8} \\ \mathbb{P}(b = 1|y = 0, x = 0, a = 0) &= \cos^2 \frac{\pi}{8} \\ \mathbb{P}(b = 1|y = 1, x = 0, a = 0) &= \cos^2 \left(-\frac{\pi}{8}\right) = \cos^2 \frac{\pi}{8}\end{aligned}$$

### 3.2.3 Résultats

$\forall (x, y, a, b) \in \{0, 1\}^4$ , nous avons :

$\mathbb{P}(a, b|x, y) = \mathbb{P}(b|x, y, a) \times \mathbb{P}(a|x, y) = \mathbb{P}(b|x, y, a) \times \mathbb{P}(a|x) = \mathbb{P}(b|x, y, a) \times \mathbb{P}(a|x)$  (la partie traitant des agissements de Alice est indépendante de celle de Bob).

Après calculs des différents cas à l'aide des méthodes explicitées précédemment, nous pouvons dresser le tableau suivant. Celui-ci présente la probabilité que Alice et Bob répondent  $(a, b)$  sachant qu'ils ont reçu  $(x, y)$ . En d'autres termes, il permet d'obtenir les chances de réussite de la méthode quantique étudiée :

(x,y) \ (a,b)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
(0,0)	$\frac{1}{2} \cos^2 \frac{\pi}{8}$	$\frac{1}{2} (1 - \cos^2 \frac{\pi}{8})$	$\frac{1}{2} (1 - \cos^2 \frac{\pi}{8})$	$\frac{1}{2} \cos^2 \frac{\pi}{8}$
(0,1)	$\frac{1}{2} \cos^2 \frac{\pi}{8}$	$\frac{1}{2} (1 - \cos^2 \frac{\pi}{8})$	$\frac{1}{2} (1 - \cos^2 \frac{\pi}{8})$	$\frac{1}{2} \cos^2 \frac{\pi}{8}$
(1,0)	$\cos^2 \frac{\pi}{8}$	$1 - \cos^2 \frac{\pi}{8}$	0	0
(1,1)	$1 - \cos^2 \frac{\pi}{8}$	$\cos^2 \frac{\pi}{8}$	0	0

Calculons alors la probabilité pour Alice et Bob de gagner le jeu CHSH à partir de ce tableau :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(a \oplus b = xy) &= \sum_{\substack{(a,b,x,y) \in \{0,1\}^4 \\ a \oplus b = xy}} \mathbb{P}(a, b|x, y) \times \mathbb{P}(x, y) = \sum_{\substack{(a,b,x,y) \in \{0,1\}^4 \\ a \oplus b = xy}} \frac{1}{4} \mathbb{P}(a, b|x, y) = \\ \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + 1 \right) \cos^2 \frac{\pi}{8} &= \cos^2 \frac{\pi}{8} \approx \mathbf{85\%}.\end{aligned}$$

En conclusion de cette séquence calculatoire, la stratégie quantique affiche bien de meilleurs résultats quant à la probabilité de gagner le jeu CHSH.

## 4 L'avènement des probabilités pour décrire le monde : un changement de paradigme à contre-courant des grands penseurs

### 4.1 L'approche probabiliste à travers le mathématicien Pierre-Simon Laplace

Le déterminisme en science, et plus particulièrement en mécanique, est un concept se rapprochant de l'idéal pour beaucoup de savants. Depuis les apports d'Isaac Newton à la philosophie naturelle<sup>3</sup> à la fin du XVII<sup>ème</sup> siècle, ses lois permettent de décrire le mouvement d'une particule de matière selon une équation différentielle. En d'autres termes, le monde et ce qui le compose semblent avoir un caractère prédictif, où les forces permettent d'expliquer la position dans le temps de n'importe quel objet. Chaque événement est alors une causalité d'un événement précédent. Connaître les circonstances précises d'un événement permettrait donc de connaître tous ceux qui s'en suivent, expliquant ainsi l'univers dans ses moindres détails.

L'une des premières formalisations de cette idée nous provient de Jean Le Rond d'Alembert, qui dans l'*Encyclopédie*, avance l'existence d' "une intelligence différente du Créateur", qui permet d'assurer l'unicité des événements possibles à travers les lois de la physique alors connues mais aussi celles encore à découvrir. Le scientifique le plus attaché à cette idée de déterminisme reste cependant Pierre-Simon de Laplace, disciple de D'Alembert.

Dans son *Essai philosophique sur les probabilités*, Laplace énonce une série d'arguments défendant une version universaliste du déterminisme. L'un d'entre eux est le principe de la raison suffisante, qui justifie rigoureusement le principe de causalité : "Si toutes les circonstances de deux positions étant exactement semblables, une volonté libre agissait dans l'une et s'abstenait dans l'autre, son choix serait un effet sans cause.". En absence d'une "volonté" dont l'existence paraît absurde, deux expériences identiques ne pourraient aboutir qu'à deux résultats identiques.

En généralisant ce principe, Laplace pensait qu'il serait un jour possible pour l'intelligence humaine de prédire l'avenir et tous les événements qui le composent, comme en illustre l'expérience de pensée du Démon de Laplace : "Une intelligence qui, à un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était suffisamment vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome ; rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé, serait présent à ses yeux".

Cette idée était alors partagée, avec différentes nuances, par bon nombre de savants de son siècle et de celui d'après. Pourtant, en 1926 un physicien allemand vient mettre à mal cette idée selon laquelle "Tous les événements, ceux mêmes qui par leur petitesse, semblent ne pas tenir aux grandes lois de la nature, en sont une suite aussi nécessaire que les révolutions du Soleil". En effet, les petits éléments que représentent les électrons n'ont pas de position qui peut être connue malgré des conditions initiales identiques. Max Born vient alors de découvrir que la fonction d'onde d'un électron indique seulement la probabilité que celui-ci soit détecté en tel ou tel point de l'écran.

### 4.2 La controverse Einstein-Bohr sur le quantique

Les contributions d'Einstein essentielles au développement de la mécanique quantique sont parfois occultées par ses autres travaux. Pourtant, c'est à lui que l'on doit l'idée selon laquelle la lumière pourrait être formée de "quanta lumineux", ou encore celle qui théorise l' "émission stimulée", c'est-à-dire l'émission d'un photon par un atome sous l'effet d'un rayonnement incident.

Le savant allemand adhère bien au formalisme de la mécanique quantique et ne conteste nullement son efficacité à prédire les phénomènes. Pourtant, il est en profond désaccord avec l'interprétation qu'en propose Niels Bohr et son école de Copenhague. Pour Einstein, il est impossible que la mécanique quantique permette seulement d'évaluer les probabilités que différents résultats se produisent, et non de déterminer avec certitude ces derniers. L'héritage déterministe laplacien se ressent à travers cette célèbre citation du père de la relativité restreinte : "Dieu ne joue pas aux dés". L'interprétation quantique de Niels Bohr est alors incomplète et provisoire pour lui. Bohr lui répondra d'ailleurs, non sans audace : "Mais qui êtes-vous, Albert Einstein, pour dire à Dieu ce qu'il doit faire ?".

<sup>3</sup>Discipline qui recouvrait autrefois l'ensemble des sciences naturelles (astronomie, physique, chimie et biologie).

Présentés pour la première en 1920, il faut attendre le 5e Congrès Solvay<sup>4</sup> en 1927 les deux savants entamèrent l'une des controverses les plus suivies dans le milieu scientifique du XXe siècle. Pendant plus d'une vingtaine d'années, les deux scientifiques n'ont eu de cesse d'échanger afin de prendre définitivement le dessus sur la théorie de l'autre. Le 15 mai 1935, le père de la relativité publie un article avec Boris Podolsky, Nathan Rosen dans la *Physical Review*, intitulé *La description quantique de la réalité physique peut-elle être considérée comme complète?*. Les hypothèses de départ de cet article, appartenant plus au domaine de la philosophie que de la physique, sont les suivantes :

1. Les prédictions de la physique quantique sont justes.
2. Aucune influence ne peut se propager plus vite que la lumière.
3. Si, sans perturber le système en aucune façon, nous pouvons prédire avec certitude, c'est-à-dire une probabilité égale à 1, la valeur d'une grandeur physique, alors il existe un élément de la réalité physique correspondant à cette grandeur physique.

Si l'on prend la physique quantique au sérieux, alors certaines de ces implications ne peuvent être juste d'après les auteurs. Ils pensent alors qu'il existe un niveau plus fin de physique quantique, qui permettrait d'expliquer certaines incohérences. Après six semaines de réflexions intenses, Bohr publie dans le même journal et avec le même titre, un article en réponse à ce dernier. Son argumentation reste cependant assez confuse ; il ne reconnaît pas de fautes de raisonnement dans l'article de ses pairs, mais critique néanmoins le critère de réalité d'Einstein. Pour Bohr, "dans certaines situations, on doit se retenir d'accorder des attributs physiques aux objets, notamment quand on traite de phénomènes pour lesquels on ne peut pas faire de distinction tranchée entre le comportement de ces objets, et leur interaction avec ces objets". La mesure d'un événement n'est plus considérée comme un événement passif et résultant d'une manipulation, mais au contraire comme un acte majeur et actif de l'expérimentation.

L'expérience de pensée explorée durant ce rapport a participé à une "victoire" de la théorie avancée par Bohr et ses collègues. La deuxième hypothèse, dénommée principe de localité, ne résiste pas à l'intrication des particules qui, d'une certaine manière, permet une communication plus rapide que la vitesse de la lumière. Ce principe d'intrication ou de "non-séparabilité quantique" a pu être pour la première fois prouvé expérimentalement grâce à Alain Aspect et son équipe de l'Institut d'Optique à Orsay en 1980. Dans certaines conditions, deux particules qui ont interagit dans le passé, ont des liens que même leur distance mutuelle, aussi grande soit elle, n'affaiblit pas. Ce qui arrive à l'une d'elle est immédiatement intriquée à ce qui arrive à l'autre, par l'entremise d'une connexion étrange, sans équivalent dans la vie ordinaire. Einstein utilisera le mot de "télépathie" à cet égard. Malheureusement, le scientifique allemand s'est éteint en 1955, bien avant cette découverte, ou bien même l'énoncé du jeu CHSH pour la première fois.

Ces débats restent pour la science et en particulier pour l'épistémologie un ensemble de ressources riche à penser et marqueur d'une période très fertile scientifiquement.

---

<sup>4</sup>Les Congrès Solvay sont des conférences scientifiques en physique (mais aussi en chimie) qui se tiennent depuis 1911. Elles réunissaient alors les plus grands scientifiques de l'époque, et étaient souvent accompagnées d'avancées considérables dans ces différents domaines.

## Conclusion

Pour répondre à la question initiale, la grande erreur d'Einstein était donc de ne pas croire en l'intrication quantique et ses conséquences. Sans pour autant pouvoir être considéré comme de la communication à une vitesse supérieure à celle de la lumière, les propriétés de l'intrication quantique permettent néanmoins, dans le cadre d'une expérience de pensée telle que le jeu CHSH, d'obtenir des résultats qui ne pourraient être atteints autrement.

Alors qu'Alice et Bob étaient condamnés à ne pouvoir gagner que trois sur quatre après un grand nombre d'expériences, ces derniers peuvent espérer avoisiner les 85% de chance de succès à ce jeu. La difficulté à manipuler des particules quantiques reste bien évidemment un frein important à la réalisation de cette expérience hors du cadre théorique, même si les travaux d'Alain Aspect et son équipe ont fait des avancées majeures dans ce domaine. Cependant, certains domaines émergents arrivent à exploiter le potentiel du quantique, comme l'informatique quantique ou encore la cryptographie quantique, et sont sans doute voués à un avenir prometteur.

Enfin, le caractère probabiliste que propose la mécanique quantique pour décrire le monde a, comme nous l'avons exploré à la fin de ce rapport, été sujet à de nombreuses controverses. Plusieurs scientifiques, et Einstein le premier, ont rencontré de grandes difficultés à accepter les résultats de la mécanique quantique, en particulier celui qui démontre que la nature n'est pas purement déterminée, et comporte une part certaine de hasard. Heureusement pour les physiciens, cette part de hasard ne se manifeste presque qu'exclusivement lors de phénomènes à échelle microscopique. Einstein peut donc être rassuré, la Lune sera la même s'il arrête de la regarder.

## Bibliographie

- [1] Pierre Botteron (2023) *Les Bases Mathématiques de la Mécanique Quantique*, Université de Toulouse.
- [2] Alain Aspect, Philippe Grangier and Gérard Roger (1982). Experimental realization of einstein-podolsky-rosen-bohm : A new violation of bell's inequalities *Phys. Rev. Lett*
- [3] J.S. Bell. (1964). On the einstein podolsky paradox *Physics Physique Fizika*
- [4] A. Einstein (1905). Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt *Annalen der Physik*
- [5] A. Einstein, B.Podolsky and N.Rosen (1935). Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev*
- [6] Clément Pellegrini (2008). *Existence, unicité et approximation des équations de Schrödinger stochastiques*, Université Claude Bernard - Lyon I
- [7] Etienne Klein et Gautier Depambour (2021). *Idées de génies, 33 textes qui ont bousculé la physique*
- [8] Jean Le Rond d'Alembert (1751-1772). *L'encyclopédie*
- [9] Pierre-Simon de Laplace (1814). *Essai philosophique sur les probabilités*
- [10] Etienne Klein. Physique quantique : les travaux révolutionnaires d'Alain Aspect, prix Nobel de physique, expliqués *Episode 1/4 : Pourquoi le monde quantique est-il si bizarre?*. RadioFrance, 10 octobre 2022. 5 min.
- [11] Etienne Klein. Physique quantique : les travaux révolutionnaires d'Alain Aspect, prix Nobel de physique, expliqués *Episode 2/4 : Le débat entre Bohr et Einstein*. RadioFrance, 11 octobre 2022. 5 min.
- [12] Etienne Klein. Physique quantique : les travaux révolutionnaires d'Alain Aspect, prix Nobel de physique, expliqués *Episode 3/4 : L'incroyable "article EPR"*. RadioFrance, 12 octobre 2022. 5 min.
- [13] Etienne Klein. Physique quantique : les travaux révolutionnaires d'Alain Aspect, prix Nobel de physique, expliqués *Episode 4/4 : Comment l'expérience d'Alain Aspect a tranché le débat Einstein-Bohr*. RadioFrance, 13 octobre 2022. 5 min.