

# Le jeu CHSH : Quelle était la grande erreur d'Einstein ?

Encadré par :  
BOTTERON Pierre

---

Réalisé par :  
DUBIGEON Marine et ESSAKHI Sara

---

2ème Année  
PO : MIC  
Groupe : A

Année universitaire : 2022/2023  
INSA Toulouse



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Principe et règles du jeu CHSH</b>	<b>3</b>
<b>II</b>	<b>Stratégies déterministes</b>	<b>4</b>
1	Contexte : le déterminisme physique . . . . .	4
2	Les chances de gagner avec une stratégie déterministe s'élèvent à 75% maximum . . . . .	4
<b>III</b>	<b>Stratégies classiques ou probabilistes</b>	<b>7</b>
1	Présentation de la stratégie classique . . . . .	7
2	Preuve . . . . .	8
3	Les stratégies probabilistes dans le cas des jeux non linéaires...	9
<b>IV</b>	<b>Stratégies quantiques</b>	<b>10</b>
1	Contexte : le jeu CHSH et la théorie quantique . . . . .	10
2	Quelques concepts mathématiques . . . . .	11
3	Retour au jeu CHSH . . . . .	13
<b>V</b>	<b>"L'erreur" d'Einstein</b>	<b>19</b>
1	L'arrivée progressive de la physique quantique bouleverse la conception de la réalité . . . . .	19
2	Le débat Einstein-Bohr . . . . .	20
3	Les inégalités de Bell . . . . .	22
4	Quelques expériences menées qui renforcent les violations des inégalités de Bell . . . . .	22
<b>VI</b>	<b>Ouverture sur des applications de la physique quantique</b>	<b>23</b>
1	Téléportation quantique . . . . .	23
2	Le rayon laser . . . . .	24
<b>VII</b>	<b>Conclusion</b>	<b>25</b>

## Introduction

En 1935, Albert Einstein publie dans *Physical Review*, avec ces deux collaborateurs Boris Podolsky et Nathan Rosen, un article scientifique dans lequel il cherche à montrer les limites de la physique quantique. Il s'agit en fait d'une expérience de pensée qui souligne une incompatibilité entre certains principes de la physique quantique et sa fameuse théorie de la relativité. Pour Einstein, il paraît effectivement impossible que deux particules quantiques liées dans un état intriqué puissent communiquer en instantané, quelle que soit la distance qui les séparent, puisque la relativité restreinte implique, entre autres, qu'aucun signal ne peut se déplacer dans l'univers plus vite que la lumière : c'est le fameux paradoxe EPR.

Einstein ne met pas en doute toute la théorie quantique, puisqu'il a lui-même participé à son développement, mais cherche simplement à montrer qu'elle reste incomplète. . . en tout cas à ses yeux. Suite à la publication de cet article, le scientifique Niels Bohr décide de « défendre » la théorie quantique en publiant, également dans la revue *Physical Review*, un article visant à contredire la prise de position d'Einstein, Podolsky et Rosen, en reprenant le titre déjà utilisé par ces derniers : « La description quantique de la réalité physique peut-elle être considérée comme complète ? ». Bien entendu, pour Bohr la réponse est oui. Cette controverse, au départ plus philosophique que scientifique, nourrira le débat entre les deux physiciens pendant plus de vingt ans, alors même que les autres scientifiques de leurs époques n'étaient que peu intéressés par le sujet. Einstein proposera d'abord la théorie de variables cachées, rejetée par Bohr qui, lui, soutiendra le principe de non-localité de la physique quantique ; mais ceci sera explicité plus en détail dans la suite du document.

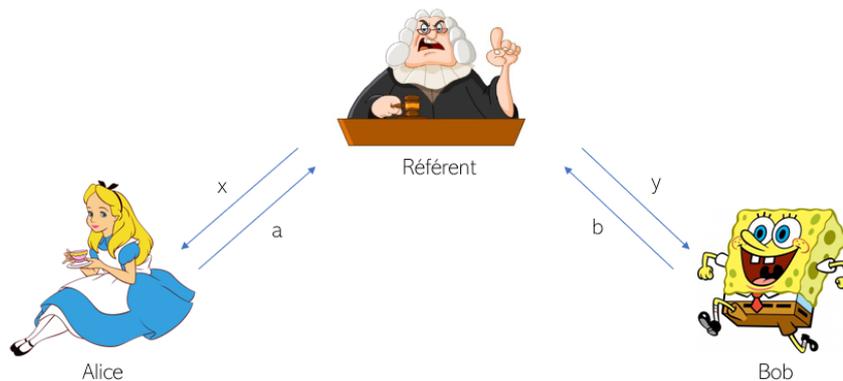
De nombreux scientifiques participeront plus tard à la résolution de cette divergence entre Bohr et Einstein. Quelques années plus tard, en 1964, John Stewart Bell énonce des relations qui doivent être respectées par toute mesure sur des états intriqués, dans l'hypothèse d'une théorie déterministe faisant appel à des variables cachées locales, comme le proposait Einstein : ce sont les inégalités de Bell. Or, en 1969, les physiciens John Clauser, Micheal Horne, Abner Shimony et Richard Holt publient un article dans lequel ils présentent le jeu mathématique CHSH (acronyme de leurs initiales respectives) qui constitue une preuve expérimentale de la violation des inégalités de Bell. Ce jeu étant physiquement réalisable, il prouve que la physique classique reste incapable d'expliquer certains phénomènes quantiques.

Nous nous intéresserons donc à ce jeu, aux différentes stratégies utilisées pour y gagner et enfin, à comment il démontre la puissance et la légitimité de la physique quantique par rapport à la physique dite « classique » et participe à corriger « l'erreur d'Einstein ».

# I Principe et règles du jeu CHSH

Le jeu mathématique CHSH qui doit son nom à ses quatre inventeurs (John Clauser, Michael Horne, Abner Shimony et Richard Holt) est un scénario hypothétique présenté sous forme de jeu entre deux parties, souvent appelées Alice et Bob. Une tierce personne intervient, le référent, qui peut communiquer avec chaque joueur et dont le rôle est d'arbitrer le jeu. Pour gagner au jeu CHSH, Alice et Bob doivent coopérer. En effet, ils jouent en équipe et ne peuvent donc pas gagner séparément. Ils sont autorisés à décider d'une stratégie avant le début du jeu. Toutefois, dès que la partie commence, les 2 joueurs sont éloignés l'un de l'autre et toute communication entre eux est interdite.

Comme indiqué dans le schéma ci-dessous, le jeu commence lorsque l'arbitre fournit respectivement aux joueurs Alice et Bob des bits classiques  $x, y \in \{0, 1\}$ .



Alice et Bob doivent alors choisir et envoyer leur réponse (sans se concerter bien sûr) sous forme des bits  $a$  et  $b$ . Autrement dit, Alice n'a aucune idée de la valeur de  $y$ , et inversement pour Bob concernant la valeur de  $x$ . Les joueurs gagnent si, et seulement si, la somme modulo 2 de  $a$  et  $b$  est égale au produit  $x \cdot y$ . En d'autres termes :

$$\text{Alice et Bob gagnent au jeu} \Leftrightarrow a \oplus b = x \wedge y$$

## II Stratégies déterministes

### 1 Contexte : le déterminisme physique

En physique, un modèle déterministe suppose que l'état futur d'un système est entièrement déterminé par son état présent et les lois physiques qui le régissent. En d'autres termes, si l'on connaît parfaitement l'état présent d'un système et les lois qui le régissent, on peut prédire son état futur avec une certitude absolue. Cette théorie a notamment été défendue par Albert Einstein, qui accordait une importance toute particulière à la notion de causalité. L'idée selon laquelle la physique suivrait des relations de cause à effet permet en effet de formuler des explications à de nombreux phénomènes et événements, si ce n'est la plupart.

Dans le cadre du jeu CHSH, se placer dans un contexte de stratégie déterministe signifie que les réponses d'Alice et Bob aux questions posées par l'arbitre ne sont pas aléatoires, mais sont régies et déterminées à l'avance par des règles fixes. En choisissant au préalable une stratégie, modélisée par une ou deux fonction(s) associant le bit réponse a ou b au bit question x ou y, une même question posée renverra inévitablement toujours la même réponse. Ainsi, en connaissant la stratégie décidée par Alice et Bob ainsi que les bits x et y donnés par le référent, on peut prédire exactement quelles seront les réponses des deux joueurs.

### 2 Les chances de gagner avec une stratégie déterministe s'élèvent à 75% maximum

Alice et Bob ont donc la possibilité de se mettre d'accord, avant le début du jeu, sur une stratégie qui contribuerait à maximiser leurs chances de gagner. Nous nous intéressons ici aux stratégies déterministes. Les joueurs vont donc choisir une fonction qui leur donnera la réponse à renvoyer en fonction du bit qu'il ont reçu. L'objectif pour Alice et Bob est donc de faire le choix de fonction le plus stratégique. A savoir, celui qui leur assure de gagner dans le plus de cas possibles. Nous allons montrer dans cette partie que, peu importe la stratégie, on ne peut pas gagner dans plus de 3 cas sur 4.

Tout d'abord, montrons qu'il n'existe que 4 fonctions  $f_i : \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$ ,  $i \in \{0,1\}$ .

$$\{f : \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}\} = \{0,1\}^{\{0,1\}}$$

$$\begin{aligned}
\text{donc, Card}(\{f : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}\}) &= \text{Card}(\{0, 1\}^{\{0,1\}}) \\
&= \text{Card}(\{0, 1\}) \times \text{Card}(\{0, 1\}) \\
&= 2 \times 2 \\
&= 4
\end{aligned}$$

Ces fonctions  $f_i$  sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= 0 \\
f_2(x) &= 1 \\
f_3(x) &= x \\
f_4(x) &= x+1
\end{aligned}$$

Avec ces quatre fonctions ont remarque qu'il existe donc exactement 10 stratégies possibles pour Alice et Bob. En effet, il existe  $\binom{2}{4} = 6$  combinaisons de fonctions auxquelles il faut ajouter les 4 cas où Alice et Bob utilisent tous deux la même fonction.

On fait l'analyse détaillée pour deux stratégies sur les dix :

x	y	a	b	$x \wedge y$	$a \oplus b$	res
0	0	1	1	0	0	Win
0	1	1	0	0	1	Lose
1	0	0	1	0	1	Lose
1	1	0	0	1	0	Lose

Dans le cas où Alice et Bob utilisent tous les deux la fonction  $f_4$  définie pour tout  $x \in \{0, 1\}$  par  $f_4(x) = x+1$  la probabilité de gagner est de 25%

x	y	a	b	$x \wedge y$	$a \oplus b$	res
0	0	0	0	0	0	Win
0	1	0	0	0	0	Win
1	0	0	0	0	0	Win
1	1	0	0	1	0	Lose

Dans le cas où Alice et Bob utilisent tous les deux la fonction  $f_1$  définie pour tout  $x \in \{0, 1\}$  par  $f_1(x) = 0$  la probabilité de gagner s'élève à 75%

Puis on donne l'ensemble des résultat pour les dix stratégies :

fonction utilisée par Alice	fonction utilisée par Bob	Résultat stratégie
$f_1$	$f_1$	75 %
$f_1$	$f_2$	25 %
$f_1$	$f_3$	75 %
$f_1$	$f_4$	25 %
$f_2$	$f_2$	75 %
$f_2$	$f_3$	25 %
$f_2$	$f_4$	75 %
$f_3$	$f_3$	25 %
$f_3$	$f_4$	75 %
$f_4$	$f_4$	25 %

On a donc montré qu'on peut s'assurer au maximum 75 % de chances de gagner avec les stratégies déterministes.

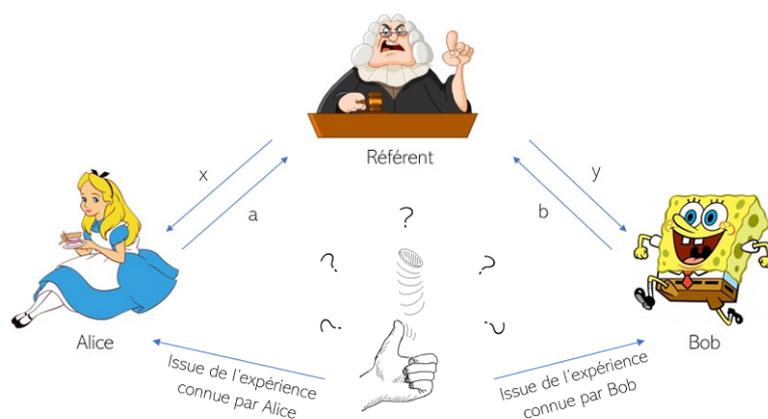
Cliquez sur ce lien pour accéder au code en Python permettant de montrer le taux de réussite maximum avec des stratégies déterministes.

### III Stratégies classiques ou probabilistes

#### 1 Présentation de la stratégie classique

Dans cette seconde partie, Alice et Bob ont accès à un aléa partagé quelconque. Ils pourraient par exemple partager le résultat du lancer d'une pièce ou d'un dé ou encore une série de nombres générés aléatoirement etc... Etant ici placés dans le cadre de la physique classique qui s'appuie, entre autres, sur le principe de localité, on représente cet aléa partagé par une variable cachée locale, notée  $\lambda$ .

Pour revenir au jeu CHSH, il est donc possible pour Alice et Bob d'élaborer une stratégie classique, également appelée probabiliste, leur permettant de gagner avec un certain pourcentage de chances de réussite. Dans notre cas, on suppose qu'ils partagent le lancer d'une pièce parfaitement équilibrée. L'issue de cette expérience aléatoire (Pile ou Face) est connue des deux joueurs. Il est donc envisageable pour Alice et Bob d'élaborer une stratégie faisant appel à un paramètre aléatoire. Autrement dit, le choix du bit réponse renvoyée au référent dépendra du résultat de la pièce. On peut ainsi supposer que cette nouvelle variable cachée nous permette d'atteindre de meilleurs résultats en terme de chances de réussite. Pourtant, nous allons montrer que, tout comme les stratégies déterministes, les stratégies probabilistes ne permettent pas de gagner à plus de 75%.



## 2 Preuve

Montrons donc que les stratégies probabilistes permettent de s'assurer au mieux 75% de chances de gagner au jeu CHSH.

Prenons l'exemple où Alice et Bob ont accès au résultat du lancer d'une pièce de monnaie partagée. C'est l'arbitre qui lance la pièce et l'issue de cette expérience aléatoire, à savoir pile ou face, permettra aux joueurs de décider des bits a et b.

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de probabilité  $p$  :

$$X \sim B(p) \text{ avec } p \in [0, 1] \text{ tels que}$$

$$\begin{cases} P(X = \text{pile}) = P(X = 1) = p \\ P(X = \text{face}) = P(X = 0) = 1 - p \end{cases}$$

Soient  $f_p$  et  $f_f$  les deux fonctions choisies par Alice telles que

$$\begin{cases} f_p & \text{si } X = \text{pile} \\ f_f & \text{si } X = \text{face} \end{cases}$$

On a donc  $f(x) = p \times f_p(x) + (1-p) \times f_f(x)$

Soient  $g_p$  et  $g_f$  les deux fonctions choisies par Bob telles que

$$\begin{cases} g_p & \text{si } X = \text{pile} \\ g_f & \text{si } X = \text{face} \end{cases}$$

On a donc  $g(x) = p \times g_p(x) + (1 - p) \times g_f(x)$

Montrons que la probabilité de succès ne peut pas dépasser les 75%. On a :

$$P(a \oplus b = x \wedge y) = P(a \oplus b = x \wedge y | X = \text{pile}) \times p + P(a \oplus b = x \wedge y | X = \text{face}) \times (1 - p)$$

$$P(a \oplus b = x \wedge y) = P(f_p(x) + g_p(x) = x \wedge y \ \& \ r = \text{'pile'}) \\ + P(f_f(x) + g_f(x) = x \wedge y \ \& \ r = \text{'face'})$$

$$P(a \oplus b = x \wedge y) = \underbrace{P(f_p(x) + g_p(x) = x \wedge y | r = \text{pile})}_{\leq 0.75\%} \times p \\ + \underbrace{P(f_f(x) + g_f(x) = x \wedge y | r = \text{face})}_{\leq 0.75\%} (1 - p)$$

$$P(a \oplus b = x \wedge y) \leq 0,75 \times p + 0,75 \times (1 - p)$$

$$P(a \oplus b = x \wedge y) \leq 0,75$$

Ainsi, comme pour les stratégies déterministes on ne peut dépasser les 75% de taux de réussite avec les stratégies probabilistes. L'ajout de la variable cachée ne change donc rien à l'efficacité de la stratégie. D'ailleurs, en réfléchissant bien à la situation à laquelle Alice et Bob font face, on pouvait tout à fait se douter de cette conclusion...

### 3 Les stratégies probabilistes dans le cas des jeux non linéaires...

On remarque effectivement que les stratégies utilisées par Alice et Bob dans le contexte probabiliste seront en fait exactement les mêmes que les dix stratégies énoncées dans la partie "Stratégies déterministes". Ces dix combinaisons sont en effet les seules possibles et l'ajout de la pièce ne fait que rendre le choix de stratégie aléatoire. Concrètement, Alice et Bob associeront au préalable deux des dix stratégies déterministes aux issues "Pile" et "Face" et choisiront ainsi la stratégie à adopter en fonction du résultat donné par la pièce au lieu de le décider de manière complètement prédéfinie.

Ceci peut s'expliquer par la non-linéarité du jeu CHSH. En effet, ce type de stratégie probabiliste pourrait apporter de meilleurs résultats dans le cadre de certains jeux dits linéaires. Ce n'est toutefois pas le cas pour le jeu CHSH.

Un jeu linéaire est un jeu pour lequel la somme des gains et des pertes est toujours nulle. Le jeu "Pierre - Feuille - Ciseaux" est un exemple de jeu linéaire. Si un joueur gagne, l'autre perd, la somme de gains  $+1 -1$  est donc nulle. Dans le cas où il ya match nul, la somme des gains et pertes est toujours égale à zéro.

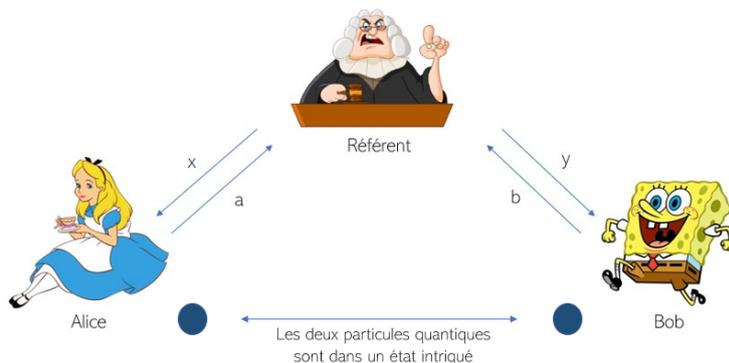
Ici, soit Alice et Bob gagnent tous les deux, soit ils perdent. La somme des gains/pertes n'est donc jamais nulle. De ce fait, le jeu CHSH est considéré comme non-linéaire. C'est d'ailleurs cet aspect qui en fait un jeu si important car il permet d'illustrer avec un cas pratique la puissance de la mécanique quantique et certains de ces aspects tels que la non-localité ou la corrélation quantique, qui ne peuvent être expliqués par les jeux linéaires à somme nulle.

## IV Stratégies quantiques

### 1 Contexte : le jeu CHSH et la théorie quantique

L'un des objectifs premiers du jeu CHSH est de démontrer la puissance de la physique quantique face à la mécanique dite classique. En effet, ce cas concret prouve que la physique quantique permet de décrire certains aspects du réel occultés ou ignorés par sa cousine classique. Nous allons donc montrer dans cette partie comment une stratégie quantique peut nous permettre d'obtenir un taux de réussite supérieur à 75%, soit meilleur qu'avec les stratégies déterministes et probabilistes.

Afin d'utiliser une stratégie dite quantique dans le cadre du jeu CHSH, on fait intervenir un nouveau paramètre. Alice et Bob vont en effet disposer chacun d'une particule quantique qui sont dites intriquées entre elles. Cela signifie qu'elles sont physiquement et intrinsèquement liées, peu importe la distance qui les séparent, si bien que, lorsqu'on effectue la mesure d'une observable (propriété comme la vitesse, la position ou encore le spin par exemple) sur une des particules, elle se fige instantanément, et ce pour les deux particules intriquées. La valeur de l'observable en question est en fait indéterminée au départ et peu varier en permanence. C'est l'action de prendre sa mesure qui la fige et qui fixe alors aussi sa particule intriquée à la même valeur, de manière instantanée (la transmission de l'information ne se limite pas à la vitesse de la lumière puisqu'elle est immédiate).



L'ajout de ce paramètre quantique permet donc à Alice et Bob de choisir leurs bits réponses  $a$  et  $b$  en fonction des résultats des mesures qu'ils effectuent sur leurs particules respectives. Ainsi, en exploitent ces corrélations quantiques de manière à maximiser leur score, les deux joueurs pourront obtenir de meilleurs résultats qu'avec les stratégies vues précédemment ; et donc montrer la puissance et l'intérêt de la physique quantique. C'est ce que nous allons démontrer dans cette partie.

Il convient tout de même de noter que l'élaboration de la stratégie quantique du jeu CHSH repose sur certains principes fondamentaux de la physique quantique, tels que l'intrication et les corrélations non locales. Il est donc nécessaire d'introduire quelques concepts mathématiques importants à la description et l'étude de ces phénomènes physiques...

## 2 Quelques concepts mathématiques

- \* **qubit** : un qubit ou quantum bit est l'équivalent quantique d'un bit classique, qui est l'unité fondamentale d'information classique. Toutefois, contrairement à un bit classique qui ne peut exister que dans l'un des deux états 0 ou 1, un qubit peut exister dans une superposition quantique, ce qui signifie qu'il peut être simultanément dans plusieurs états. La superposition est une propriété quantique qui permet au qubit d'être dans un état qui peut se traduire par combinaison linéaire des états 0 et 1. Il est noté par la notation de Dirac qui suit  $|\psi\rangle$  et est de norme 1 dans  $\mathbb{C}^2$ .
- \* **état quantique** : il s'agit d'une notion étroitement liée au qubit qui représente l'état dans lequel se trouve le système à un instant donné. Dans le contexte des qubits, un état quantique est un vecteur de norme 1 dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ .
- \* **observable et mesure quantique** : une observable quantique est une grandeur physique qui peut être mesurée expérimentalement. Elle représente les propriétés observables d'un système quantique, telles que la position, la vitesse, l'énergie, le spin... L'observable se modélise mathématiquement par une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  égale à sa matrice autoadjointe, *i.e.* qui vérifie  $A = \overline{A}^T$ . Comme toute matrice carrée autoadjointe, l'observable est diagonalisable et ses valeurs propres sont réelles et correspondent aux valeurs que l'on peut mesurer (les différentes vitesses possibles que peut prendre une particule par exemple).

- \* **la mesure d'une observable quantique** permet d'obtenir une valeur numérique correspondant à une propriété observée d'un système quantique. Elle implique la projection du système dans l'un des états propres de l'observable. On n'obtient pas de résultat "déterministe" mais un résultat avec des probabilités déterminées par les coefficients de projection.
- \* **produit tensoriel** : Le produit tensoriel, noté  $\otimes$ , modélise la notion d'indépendance entre des sous-systèmes. C'est un produit entre deux matrices qui se définit comme suit :  
 Soit  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$  et  $B \in \mathcal{M}_{p \times q}(\mathbb{C})$ . Donc  $A \otimes B \in \mathcal{M}_{mp \times nq}(\mathbb{C})$  avec
 
$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$
- \* **état intriqué** : dans un état intriqué, les particules sont étroitement liées et leur comportement ne peut être compris qu'en tenant compte de l'ensemble du système, et non des particules individuelles de manière isolée. C'est l'inverse d'un état séparable dans lequel les éléments sont indépendants les uns des autres et qui peut s'écrire, à l'aide du produit tensoriel, sous la forme  $|\psi\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\phi\rangle$

### 3 Retour au jeu CHSH

♣  $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\cos\frac{\pi}{4}+1}{2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{2} = \frac{\sqrt{2}+2}{4}$   
 (on a utilisé la formule  $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ )

♣ On a

$$A_\theta \cdot A_\theta^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = Id$$

Donc  $A_\theta^{-1} = A_\theta^T$

♣ Montrons que  $M_\theta$  est une observable quantique

$$M_\theta \text{ est une observable quantique} \iff M_\theta = \overline{M_\theta^T}$$

$$\text{On a } M_\theta^T = (A_\theta \cdot M \cdot A_\theta^{-1})^T = (A_\theta^{-1})^T \cdot M^T \cdot A_\theta^T = (A_\theta^T)^T \cdot M^T \cdot A_\theta^T = A_\theta \cdot M^T \cdot A_\theta^T = M_\theta$$

Donc  $M_\theta$  est bien une observable quantique  $M$  est diagonale et on remarque qu'elle admet 2 valeurs propres  $\lambda_0 = 0$  et  $\lambda_1 = 1$

♣ On a  $M_\theta = (A_\theta \cdot M \cdot A_\theta^{-1}) = A_\theta \cdot (\lambda_0 \cdot P_0^\theta + \lambda_1 \cdot P_1^\theta) \cdot A_\theta^{-1} =$  avec

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donc  $M_\theta = \lambda_0 \cdot Q_\theta^0 + \lambda_1 \cdot Q_\theta^1$  où  $Q_\theta^0 = A_\theta \cdot P_0 \cdot A_\theta^{-1}$  et  $Q_\theta^1 = A_\theta \cdot P_1 \cdot A_\theta^{-1}$

$$Q_\theta^0 = A_\theta \cdot P_0 \cdot A_\theta^{-1} \quad A_\theta \cdot P_0 = \begin{bmatrix} 0 & \sin\theta \\ 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$Q_\theta^0 = \begin{bmatrix} \sin^2\theta & \sin\theta \cdot \cos\theta \\ \sin\theta \cdot \cos\theta & \cos^2\theta \end{bmatrix}$$

$$\text{et } Q_\theta^1 = A_\theta \cdot P_1 \cdot A_\theta^{-1} \quad A_\theta \cdot P_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ -\sin\theta & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_\theta^1 = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & -\sin\theta \cdot \cos\theta \\ -\sin\theta \cdot \cos\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

♣ Montrons que  $|\psi\rangle$  est un état quantique

$$\text{On a } |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \|\psi\rangle\| = \frac{\sqrt{1^2+1^2}}{\sqrt{2}} = 1$$

Nous avons donc démontré que  $|\psi\rangle$  est bien un état quantique (sa norme est égale à 1).

♣ Déterminons  $P$ ( obtenir  $\lambda_0$  )

$$\begin{aligned}
P(\text{obtenir } \lambda_0) &= \|P_0 \cdot |\psi\rangle\|^2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( (\cos^2 \theta - \cos \theta \sin \theta)^2 + (\sin^2 \theta - \cos \theta \sin \theta)^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} (\sin^4 \theta + 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta) \\
&= \frac{1}{2} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^2 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1 + \sin(2\theta)}{2}
\end{aligned}$$

En suivant le même raisonnement, on trouve

$$P(\text{obtenir } \lambda_1) = \frac{1 + \sin(2\theta)}{2}$$

♣ Montrons que  $|\Omega\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |11\rangle$  est un état quantique de  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$

$$\text{On a } \|\Omega\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2} = 1$$

D'où  $|\Omega\rangle$  est bien un état quantique.

On veut montrer par l'absurde cet état quantique est intriqué. On suppose donc d'abord que c'est un état séparable puis on prouve le contraire

$$|\Omega\rangle \text{ un état séparable} \Leftrightarrow |\Omega\rangle = |\phi\rangle |\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |11\rangle$$

$$|\phi\rangle |\alpha\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac \\ ad \\ bc \\ bd \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} ac = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ ad = 0 \\ bc = 0 \\ bd = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \begin{cases} a = 0 \text{ ou } d = 0 \\ b = 0 \text{ ou } c = 0 \end{cases} \rightarrow \text{Absurde par disjonction de cas}$$

Donc on a bien montré que  $|\Omega\rangle$  est un état intriqué.

♣ Montrons que  $M_\theta \otimes I$  est une observable quantique où  $I$  est la matrice identité de taille  $2 \times 2$

$$\text{On a } M_\theta \otimes I = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & -\sin \theta \cos \theta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ -\sin \theta \cos \theta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \sin^2 \theta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$$

Or, la matrice est à coefficients réels. Donc  $M_\theta \otimes I = \overline{(M_\theta \otimes I)^T}$

Alors  $M_\theta \otimes I$  est une observable quantique

- ♣ Montrer que  $M_\theta \otimes I$  a les mêmes valeurs propres  $\lambda_0$  et  $\lambda_1$  que précédemment.

On a :

$$\begin{aligned} M_\theta \otimes I &= (A_\theta \cdot M \cdot A_\theta^{-1}) \otimes I = (A_\theta \otimes I_2)(M \otimes I_2)(A_\theta^{-1} \otimes I_2) \\ &= I_2 \otimes (A_\theta A_\theta^{-1})(M \otimes I_2) = (I_2 \otimes I_2)(M \otimes I_2) \\ &= I_4 \otimes (M \otimes I_2) \end{aligned}$$

$$\text{et } M_\theta \otimes I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Donc } M_\theta \otimes I \text{ a les mêmes valeurs propres que } M$$

Trouvons maintenant l'expression de  $M_\theta \otimes I$

On a

$$\begin{aligned} M_\theta \otimes I &= (A_\theta \cdot M \cdot A_\theta^{-1}) \otimes I = (A_\theta \otimes I_2)(M \otimes I_2)(A_\theta^{-1} \otimes I_2) \\ &= (A_\theta \otimes I_2)((\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1) \otimes I_2)(A_\theta^{-1} \otimes I_2) \\ &= (A_\theta \otimes I_2)(\lambda_0 P_0 \otimes I_2 + \lambda_1 P_1 \otimes I_2)(A_\theta^{-1} \otimes I_2) \\ &= \lambda_0 (P_0 \otimes I_2)(A_\theta \otimes I_2)(A_\theta^{-1} \otimes I_2) + \lambda_1 (P_1 \otimes I_2)(A_\theta \otimes I_2)(A_\theta^{-1} \otimes I_2) \\ &= \lambda_0 (A_\theta P_0 A_\theta^{-1}) \otimes I_2 + \lambda_1 (A_\theta P_1 A_\theta^{-1}) \otimes I_2 + \\ &= \lambda_0 (Q_0^\theta \otimes I_2) + \lambda_1 (Q_1^\theta \otimes I_2) \end{aligned}$$

- ♣ Montrons que la probabilité d'obtenir  $\lambda_0$  en mesurant l'observable  $(M \otimes I_2)$  à partir de l'état  $|\Omega\rangle$  donne le même résultat que la probabilité d'obtenir  $\lambda_0$  en mesurant l'observable  $M_0$  à partir de l'état  $|\psi\rangle$  calculée précédemment.

$$\clubsuit \text{ On a donc } \begin{cases} P(\text{obtenir } \lambda_0 | \theta = 0) = \frac{1+\sin 0}{2} = \frac{1}{2} \\ P(\text{obtenir } \lambda_0 | \theta = \frac{\pi}{4}) = \frac{1+\frac{\sin \pi}{2}}{2} = 1 \\ P(\text{obtenir } \lambda_1 | \theta = 0) = \frac{1-\sin 0}{2} = \frac{1}{2} \\ P(\text{obtenir } \lambda_1 | \theta = \frac{\pi}{4}) = \frac{1-\frac{\sin \pi}{2}}{2} = 0 \end{cases}$$

♣ Proctocole

Une fois qu'Alice a reçu son bit  $x$  du référent, elle choisit  $\theta = 0$  lorsque  $x = 0$ , ou bien elle choisit  $\theta = \frac{\pi}{4}$  lorsque  $x = 1$ . Elle mesure ensuite l'observable  $M_\theta \otimes I$  sur l'état  $|\psi\rangle$ , et elle note  $a$  le résultat obtenu. Ce bit  $a$  est

$$\text{la réponse qu'elle donne au référent. On a alors } \begin{cases} P(a = 0|x = 0) = \frac{1}{2} \\ P(a = 0|x = 1) = 1 \\ P(a = 1|x = 0) = \frac{1}{2} \\ P(a = 1|x = 1) = 0 \end{cases}$$

♣ On a  $|\Omega_x^a\rangle = \frac{(Q_x^a \otimes I)|\Omega\rangle}{\|(Q_x^a \otimes I)|\Omega\rangle\|}$

Donc pour  $x=0$  et  $a=0$   $|\Omega_0^0\rangle = \frac{(Q_0^0 \otimes I)|\Omega\rangle}{\|(Q_0^0 \otimes I)|\Omega\rangle\|}$

$$\text{et } Q_0^0 \otimes I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(Q_0^0 \otimes I)|\Omega\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} |11\rangle$$

D'où  $|\Omega_0^0\rangle = |11\rangle$  (car le module du dénominateur est égal à  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ )

$$\text{Pour } x=1 \text{ et } a=0, \text{ On a } Q_1^{\frac{\pi}{4}} \otimes I = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{et } (Q_1^{\frac{\pi}{4}} \otimes I)|\Omega\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes (|0\rangle + |1\rangle)$$

D'où  $|\Omega_1^{\frac{\pi}{4}}\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$  (car le module du dénominateur est égal à  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ )

$$\text{Pour } x=0 \text{ et } a=1, \text{ On a } Q_1^0 \otimes I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{et } (Q_1^0 \otimes I) |\Omega\rangle &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \otimes (|0\rangle + |1\rangle) \\ \text{D'où } |\Omega_0^1\rangle &= (|00\rangle) \text{ (car le module du dénominateur est égal à } \frac{1}{\sqrt{2}}) \end{aligned}$$

- ♣ Ensuite, c'est au tour de Bob de mesurer sa particule (sachant qu'elle a été modifiée à cause de la projection du paquet d'ondes). S'il a reçu du référent le bit  $y = 0$ , alors il choisit  $\theta = \frac{\pi}{8}$ , sinon il a  $y = 1$  et il choisit  $\theta = \frac{-\pi}{8}$ . Il mesure ensuite l'observable  $I \otimes M_\theta$  à l'état  $|\Omega_x^a\rangle$ , et il note  $b$  le résultat qu'il obtient.

$$\begin{cases} P(b = 0 | y = 0, x = 1, a = 0) = \frac{1 + \sin \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} = \cos^2 \frac{\pi}{8} \\ P(b = 0 | y = 1, x = 1, a = 0) = \frac{1 + \sin \frac{-\pi}{4}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{8} \\ P(b = 1 | y = 0, x = 1, a = 0) = \frac{1 - \sin \frac{\pi}{4}}{2} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{8} \\ P(b = 1 | y = 1, x = 1, a = 0) = \frac{1 - \sin \frac{-\pi}{4}}{2} = \cos^2 \frac{\pi}{8} \end{cases}$$

- ♣ Trouvons la probabilité d'obtenir  $\lambda_0$  en mesurant l'observable  $M_\theta$  sur l'état  $|1\rangle$

$$\text{On a } P(\text{obtenir } \lambda_0) = \|Q_0^\theta |1\rangle\|_2^2 = \|\Omega\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \begin{bmatrix} \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|_2^2 =$$

$$\left\| \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \theta \\ \cos^2 \theta \end{bmatrix} \right\|_2^2 = \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \cos^4 \theta = \cos^2 \theta (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = \cos^2 \theta$$

$$\text{D'où } \begin{cases} P(b = 0 | y = 0, x = 0, a = 0) = \cos^2 \frac{\pi}{8} \\ P(b = 0 | y = 1, x = 0, a = 0) = \cos^2 \frac{-\pi}{8} = \cos^2 \frac{\pi}{8} \\ P(b = 1 | y = 0, x = 0, a = 0) = \sin^2 \frac{\pi}{8} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{8} \\ P(b = 1 | y = 1, x = 0, a = 0) = \cos^2 \frac{\pi}{8} \end{cases}$$

- ♣ Dans le cas où  $x = 0$  et  $a = 1$ , la particule que Bob possède est  $|0\rangle$ . Calculons la probabilité d'obtenir  $\lambda_0$  en mesurant l'observable  $M_\theta$  sur l'état  $|0\rangle$

$$\text{On a } P(\text{obtenir } \lambda_1) = \|Q_0^\theta |0\rangle\|_2^2 = \|\Omega\| = \left\| \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|_2^2 =$$

$$\left\| \begin{bmatrix} -\sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta \end{bmatrix} \right\|_2^2 = \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \sin^4 \theta = \sin^2 \theta (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = \sin^2 \theta$$

$$\text{D'où } \begin{cases} P(b=0|y=0, x=0, a=1) = 1 - \cos^2 \frac{-\pi}{8} \\ P(b=0|y=1, x=0, a=1) = \sin^2 \frac{-\pi}{8} = 1 - \cos^2 \frac{-\pi}{8} = \cos^2 \frac{\pi}{8} \\ P(b=1|y=0, x=0, a=1) = \cos^2 \frac{\pi}{8} \\ P(b=1|y=1, x=0, a=1) = \cos^2 \frac{-\pi}{8} = \cos^2 \frac{\pi}{8} \end{cases}$$

♣ On a

(x,y) \ (a,b)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
(0,0)	$\frac{1}{2} \cos^2 \frac{\pi}{8}$	$\frac{1}{2}(1 - \cos^2 \frac{\pi}{8})$	$\frac{1}{2}(1 - \cos^2 \frac{\pi}{8})$	$\frac{1}{2} \cos^2 \frac{\pi}{8}$
(0,1)	$\frac{1}{2} \cos^2 \frac{\pi}{8}$	$\frac{1}{2}(1 - \cos^2 \frac{\pi}{8})$	$\frac{1}{2}(1 - \cos^2 \frac{\pi}{8})$	$\frac{1}{2} \cos^2 \frac{\pi}{8}$
(1,0)	$\cos^2 \frac{\pi}{8}$	$1 - \cos^2 \frac{\pi}{8}$	0	0
(1,1)	$1 - \cos^2 \frac{\pi}{8}$	$\cos^2 \frac{\pi}{8}$	0	0

On a  $P((a \oplus b = xy)) = \sum_{a,b,x,y \in \{0,1\}} P(a, b|x, y) \times P(x, y)$

On montre par calcul que  $P((a \oplus b = xy)) = \cos^2(\frac{\pi}{8})$

## V "L'erreur" d'Einstein

### 1 L'arrivée progressive de la physique quantique bouleverse la conception de la réalité

La physique quantique connaît ses débuts en 1925, d'abord dans le but de décrire des phénomènes à l'échelle atomique tels que les électrons, les photons et les atomes, ainsi que les interactions entre ces particules. Elle décrit la nature fondamentale de la réalité à l'échelle quantique, où les lois de la physique classique ne s'appliquent plus. Son émergence est le fruit de nombreuses expériences et découvertes révolutionnaires dont :

**Le Rayonnement du corps noir :** Max Planck était un physicien allemand qui, à la fin du XIXe siècle, cherchait à comprendre comment les objets chauffés émettaient de la chaleur sous forme de rayonnement électromagnétique. Pour cela, il a étudié un concept appelé le "corps noir" (objet théorique qui absorbe toute la lumière et le rayonnement électromagnétique incident). En menant son expérience, il a constaté que le rayonnement du corps noir n'était pas infini à des fréquences élevées. Ce qui ne contredisait les prédictions de la physique classique de l'époque basée sur les équations de l'électromagnétisme de James Clerk Maxwell. Planck a résolu ce problème en introduisant une idée révolutionnaire : l'énergie n'est pas émise de manière continue, mais plutôt sous forme de petits paquets discrets appelés "quanta". C'est l'origine du concept de quantification de l'énergie. Cette découverte a d'ailleurs valu à Planck le prix Nobel de physique en 1918.

**L'effet photoélectrique :** En reprenant l'idée de la quantification, limitée avec Planck aux échanges d'énergie entre la matière et le rayonnement, Albert Einstein fait l'hypothèse que la lumière serait constituée de "quantas de lumière" appelés photons et peut donc se comporter à la fois comme onde et particule. Il s'agit du fameux aspect dual "onde-corpuscule" de la lumière. Cette découverte lui a également valu un prix Nobel de physique, en 1921.

**Modèle de Bohr de l'atome :** En 1913, Niels Bohr a proposé son modèle de l'atome, qui s'appuie sur des idées quantiques pour expliquer les spectres d'émission des atomes. Il fait le postulat que les orbites électroniques sont quantifiées et qu'un électron passe d'un niveau à un autre en absorbant ou en émettant un photon. Bohr devient alors le fondateur du courant de Copenhague ayant permis de développer le formalisme mathématique de la physique quantique et reçoit, tout comme Einstein, un prix Nobel de physique en 1921.

**Principe d'incertitude d'Heisenberg** : En 1927, Werner Heisenberg formule pour la première fois son principe d'incertitude, qui stipule que l'on ne peut pas connaître simultanément avec une grande précision la position et la vitesse d'une même particule. Cela a entre autres remis en question la notion classique de trajectoire précise des particules. Il reçoit le prix Nobel en 1932, pour récompenser ses travaux.

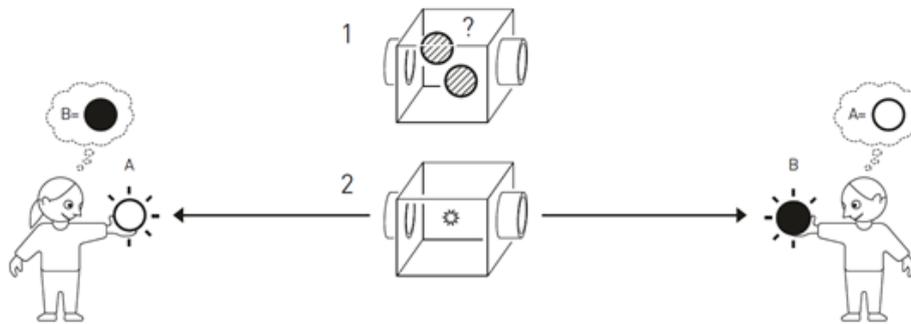
**Équations de Schrödinger** : En 1926, Erwin Schrödinger développe une équation mathématique, connue sous le nom d'équation de Schrödinger, qui décrit l'évolution temporelle des systèmes quantiques. Cette équation a fourni un cadre mathématique puissant pour décrire les propriétés quantiques des particules et des systèmes.

## 2 Le débat Einstein-Bohr

"Dieu ne joue pas aux dés". Cette célèbre réplique d'Einstein qu'il aurait prononcé lors de ces échanges avec le physicien Niels Bohr évoque principalement la notion de localité. La localité correspond à l'idée qu'il ne peut exister d'influences instantanées à distance. Einstein acceptait totalement les formalismes et fondements de la mécanique quantique mais pour lui ça n'était pas la fin de l'histoire. Ce n'était, donc, pas tant l'indéterminisme de la théorie quantique qui gênait Einstein mais plutôt la non-localité. Il devait, selon lui, exister une explication et description sous-jacente plus complète qui permettrait de ne pas faire appel à un hasard complet. Il a donc essayé de chercher une explication à cette théorie.

Einstein a également exprimé son désaccord avec l'interprétation de Copenhague, proposée par Bohr, qui affirmait que la réalité n'était pas définie avant d'être observée. Selon Einstein, il devrait y avoir une réalité objective et indépendante de l'observation, une réalité qui existerait même en l'absence de mesure. Chose que Bohr contestait puisque pour lui, mesurer c'est perturber.

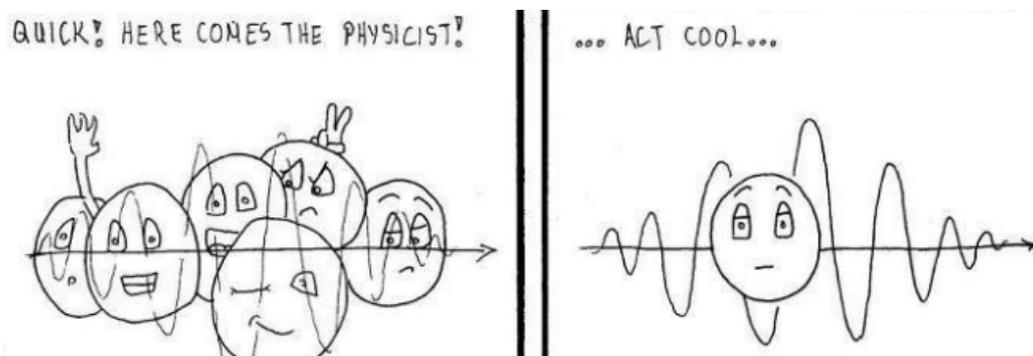
En 1935, Einstein, aidé de ses deux collaborateurs Podolsky et Rosen, lance un dernier défi à Niels Bohr à travers une expérience de pensée élaborée dans l'article EPR.



© Johan Jamestad/The Royal Swedish Academy of Sciences

L'article d'EPR suppose l'existence de deux particules, généralement appelées A et B émises par la même source. Initialement ces 2 photons sont en interaction puis s'éloignent l'un de l'autre dans des directions opposées. Cette expérience illustre le principe quantique d'intrication.

Selon les principes de la mécanique quantique, les propriétés quantiques des particules, comme la vitesse, la position ou le spin, ne sont pas déterminées avant d'être mesurées. Cependant, une fois la mesure d'une propriété d'une des particules effectuée, elle fige cette propriété pour les deux particules intriquées.



Le paradoxe d'EPR met en évidence une corrélation instantanée entre les mesures effectuées sur les particules A et B, même si elles sont séparées par de grandes distances. Chose qui contredit le principe de la causalité, selon lequel aucun signal ne peut se propager plus rapidement que la vitesse de la lumière.

Einstein, Podolsky et Rosen ont utilisé ce paradoxe pour argumenter en faveur d'une incomplétude de la description de la mécanique quantique. Ils ont soutenu que la théorie quantique ne pouvait pas fournir une description

complète de la réalité et qu'il devait exister des variables cachées qui déterminent les propriétés des particules indépendamment de leur mesure.

Mais Bohr ne répond pas vraiment aux objections d'EPR et sa défense consiste simplement à rappeler les postulats de la mécanique quantique. Cependant, le paradoxe d'EPR a suscité de nombreux débats et a conduit à des recherches approfondies sur la nature de l'intrication quantique, la non-localité et la compréhension de la réalité à l'échelle quantique puisqu'en 1960, le physicien John Bell met en place des formules mathématiques donnant raison à l'interprétation de Copenhague.

### **3 Les inégalités de Bell**

Trente ans plus tard, en reprenant les conclusions de l'article EPR, le physicien John Bell donne raison à Bohr et à son interprétation de Copenhague face à Einstein. L'intention première de Bell était de donner raison à Einstein. Si le formalisme de la mécanique quantique est incomplet, il souhaitait donc le compléter. Il imagine alors un jeu à variables cachées partagées à la source, et arrive à mettre en place des relations mathématiques qui définissent des limites sur les corrélations observables entre des systèmes physiques locaux réalistes.

### **4 Quelques expériences menées qui renforcent les violations des inégalités de Bell**

En 1982, le physicien Alain Aspect réalise une série d'expériences confirmant les prédictions théoriques de Bell. Dans ces expériences, Aspect a utilisé une source de photons qui émet des paires de photons intriqués, généralement appelés photons jumeaux ou photons intriqués. C'est à dire que les propriétés de chaque photon sont liées à l'autre de manière indissociable. Les photons intriqués sont ensuite séparés et dirigés vers deux polariseurs, généralement situés à une certaine distance l'un de l'autre. Les polariseurs sont des dispositifs optiques qui laissent passer le photon s'il a la même polarisation que le polariseur. Dans l'expérience, on peut choisir l'orientation des polariseurs de manière aléatoire. Lorsque les photons atteignent les polariseurs, leur état de polarisation est mesuré. Selon les principes de la physique quantique, la mesure de l'état de polarisation d'un photon intriqué affecte instantanément l'état de polarisation de son photon jumeau, quelle que soit la distance qui les sépare. L'objectif de l'expérience est de mesurer les corrélations entre les états de polarisation des deux photons intriqués. On compare les résultats

des mesures avec les prédictions de l'inégalité de Bell. Si les propriétés des photons étaient déterminées à l'avance et qu'il existait des variables cachées locales, on s'attendrait à ce que les corrélations mesurées respectent certaines limites définies par l'inégalité de Bell. Cependant, les expériences ont montré que les corrélations quantiques entre les photons intriqués peuvent violer ces limites, et ce qui indique que les propriétés des photons ne peuvent pas être expliquées par des variables cachées locales. Cela met en évidence la nature non-locale de la physique quantique, où les effets quantiques peuvent se propager instantanément sur de longues distances, contredisant ainsi le principe de la causalité locale.

En résumé, l'expérience d'acheminement de Bell avec des photons et des polariseurs a été conçue pour tester les inégalités de Bell et mettre en évidence les propriétés non locales de la physique quantique. Ces expériences ont fourni des preuves convaincantes de la non-localité de la mécanique quantique et ont contribué à valider les principes fondamentaux de cette théorie.

## VI Ouverture sur des applications de la physique quantique

Aujourd'hui, les applications de la physique quantique sont nombreuses. Semi-conducteurs, lasers, imagerie médicale ou encore horloge atomique. Ces innovations ont envahi notre quotidien et il s'avère donc important de rappeler l'origine quantique de quelques-unes d'entre elles.

### 1 Téléportation quantique

La téléportation désigne, dans le langage courant, la possibilité de transporter instantanément un objet ou même un être vivant d'un point de l'espace à un autre. A l'heure actuelle, cette idée venant tout droit de l'imagination des scénaristes est loin d'être envisageable. Toutefois, des expériences récentes ont montré qu'il est possible de transporter un état quantique. La première expérience de téléportation a été réalisée par Anton Zeilinger en 1997. Le protocole est le suivant : Deux photons ne suffisent pas pour avoir ce phénomène de téléportation quantique. Il faut donc faire intervenir un troisième photon. En pratique, il faut intriquer deux photons entre eux, puis en envoyer un au point de départ A et l'autre au point d'arrivée B. Ensuite, on envoie un troisième photon porteur d'une information quantique pour l'objectif d'altérer le premier photon. C'est ici précisément que l'on peut parler du phénomène de téléportation quantique : on pourra observer, alors, que le deuxième photon

sera lui aussi altéré, comme si lui aussi avait été percuté par le troisième photon.

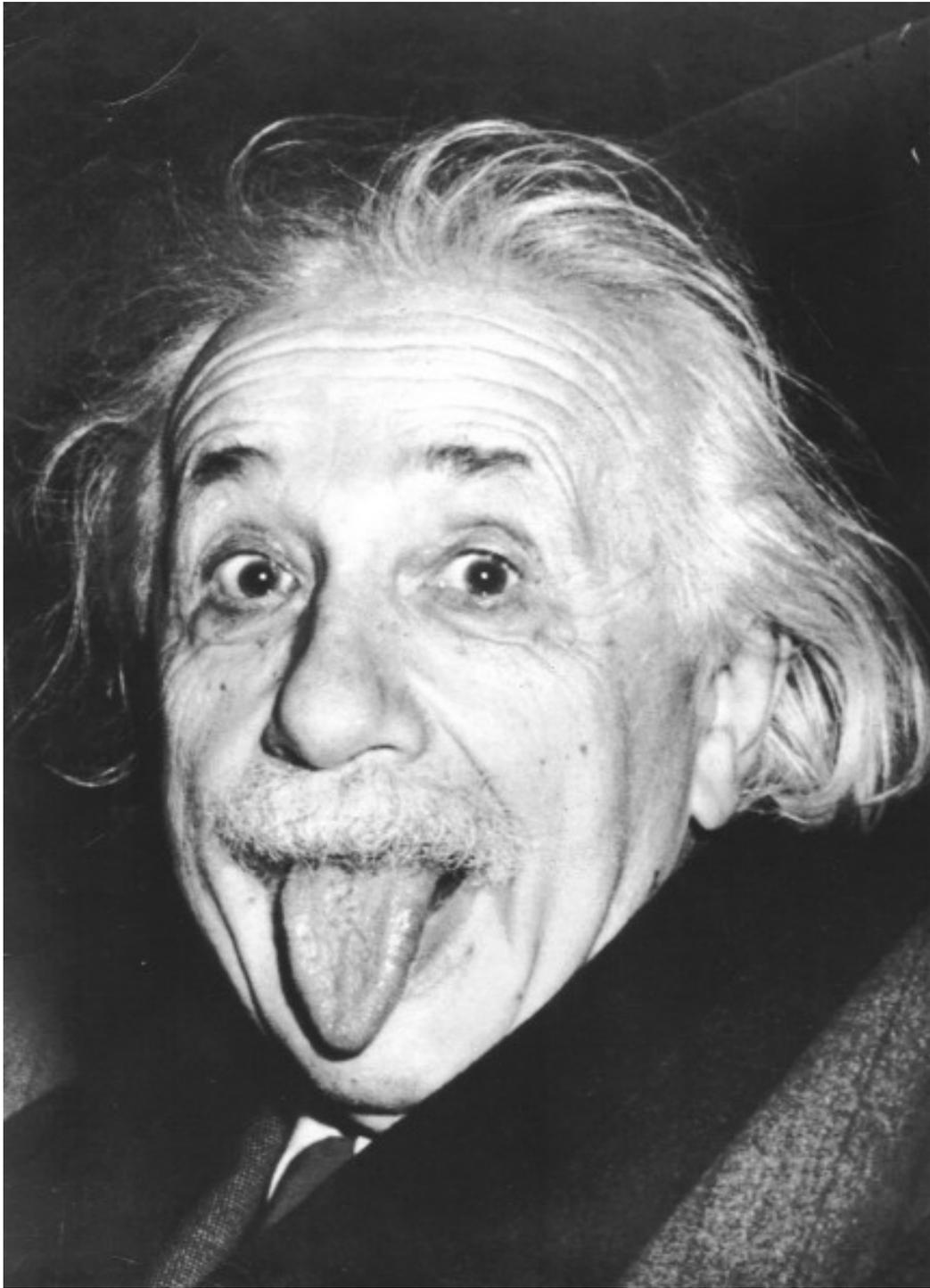
## **2 Le rayon laser**

Utilisé quotidiennement, le rayon laser est un pur produit de la physique quantique. Son principe de fonctionnement est basé sur le phénomène d'émission stimulée décrit par Einstein en 1917. Selon ce principe, lorsque des atomes ou des molécules excités sont stimulés par un photon incident, ils peuvent émettre des photons supplémentaires identiques en termes de fréquence, de phase et de direction. Dans un laser, un milieu actif (composé d'atomes, de molécules ou de cristaux) est utilisé pour amplifier la lumière par émission stimulée. Ces atomes ou molécules excités émettent, donc, des photons identiques qui stimulent les atomes ou molécules voisins à émettre également des photons, créant ainsi une avalanche de photons cohérents et amplifiés. Parmi les applications les plus courantes du laser, le lecteur-graveur CD/DVD, le lecteur de code-barres ou encore dans le domaine médical.

## VII Conclusion

Pour conclure, le jeu CHSH se révèle être un outil puissant pour mettre en évidence la légitimité de la théorie quantique de Bohr et la violation des inégalités de Bell. En effet, il a été démontré que l'utilisation de stratégies quantiques avec des états intriqués assure de meilleures chances de victoire au jeu CHSH. Cela est dû à la non localité de la théorie quantique qui stipule que les interactions entre objets physiques se propagent sur des distances infinies. Chose que Einstein contestait puisqu'il croyait en la localité et déterminisme. Cependant, il est important de souligner que cela ne diminue en rien la contribution d'Einstein au développement de la physique quantique, à travers l'article EPR mais aussi avec sa proposition de l'idée des variables cachées. Au contraire, ces concepts ont suscité de nombreuses réflexions et ont joué un rôle essentiel dans l'évolution de notre compréhension du domaine quantique. L'article EPR, à titre d'exemple, a introduit le concept d'intrication quantique, décrivant une corrélation étrange entre des particules séparées à grande distance. Bien que l'article ait soulevé des questions sur la non-localité, il a également contribué à la reconnaissance et à l'étude de l'intrication quantique, qui est maintenant considérée comme l'un des phénomènes clés de la physique quantique et a conduit au développement de nombreuses applications pratiques, telles que la téléportation quantique et la cryptographie quantique. Sans oublier qu'il a inspiré de nombreuses expériences visant à tester les inégalités de Bell et à vérifier les prédictions de la théorie quantique. Ces expériences ont permis de confirmer la nature non locale de la réalité quantique et de fournir des preuves expérimentales de la violation des inégalités de Bell.

Ainsi, le jeu CHSH constitue un exemple concret et fascinant de la façon dont la physique quantique défie nos intuitions classiques et offre de nouvelles perspectives sur la nature fondamentale de la réalité. Il rappelle également l'importance de la recherche dans ce domaine, encore aujourd'hui, ainsi que l'interaction fructueuse entre les idées de Bohr, Einstein et d'autres grands physiciens qui ont contribué à façonner notre compréhension actuelle de la physique quantique.



## Bibliographie

Charles Olivero. Comprendre LA PHYSIQUE QUANTIQUE. SENS., s. d.

Claude de CALAN: directeur de recherche au C.N.R.S.,  
centre de physique théorique, École polytechnique, Palaiseau.  
« QUANTIQUE PHYSIQUE », 4 juin 2023.  
<https://www.universalis.fr/encyclopedie/physique-quantique/>.

« Comment l'expérience d'Alain Aspect a tranché le débat Einstein-Bohr »,  
13 octobre 2022.  
<https://www.radiofrance.fr/franceculture/podcasts/le-pourquoi-du-comment-science/comment-l-experience-d-alain-aspect-a-tranche-le-debat-einstein-bohr-episode-4-9206314>.\\

David LOUAPRE. Les inégalités de BELL & les expériences d'Alain ASPECT, s. d.  
<https://www.youtube.com/watch?v=28UN70790Do&t=182s>.

« L'INTRICATION QUANTIQUE: DU DÉBAT PHILOSOPHIQUE AU PRIX NOBEL », s. d.  
<https://www.polytechnique.edu/actualites/lintrication-quantique-du-debat-philosophique-au-prix-nobel>.

Pierre Botteron|. « NonLocal Boxes and Communication Complexity », s. d.  
<https://ion.nechita.net/wp-content/uploads/2022/09/botteron-nonlocal-boxes-and-communication-complexity-msc-thesis.pdf>.

RICHARD FEYNMAN. « e paradoxe EPR et l'inégalité de BELL ». s. d.  
<https://cours.espci.fr/site.php?id=200&fileid=752>.