Boîtes Non-Locales & Complexité de Communication

Pierre Botteron*, Anne Broadbent,
Ion Nechita, Clément Pellegrini.
(Toulouse, Vendredi 26 Mai, 2023.)

Sommaire

— *Part* 1 —

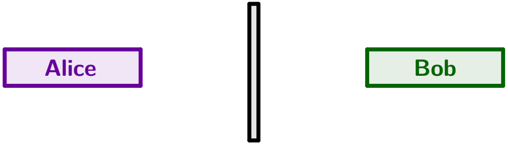
Boîtes non-locales

Le jeu CHSH

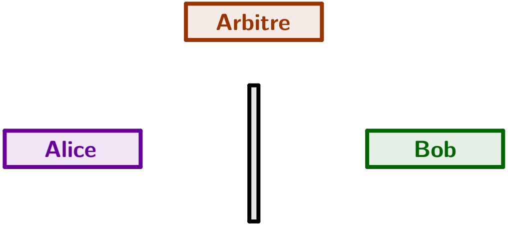
Le jeu CHSH

Alice **Bob**

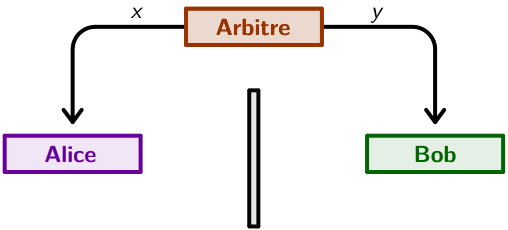
Le jeu CHSH



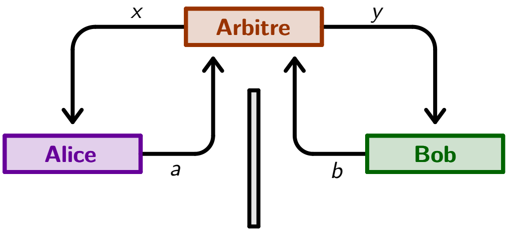
Le jeu CHSH



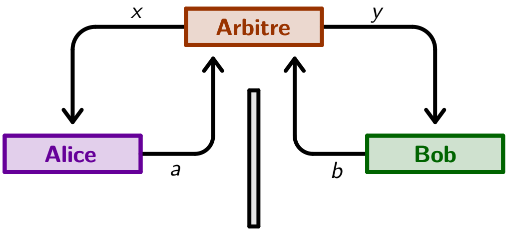
Le jeu CHSH



Le jeu CHSH

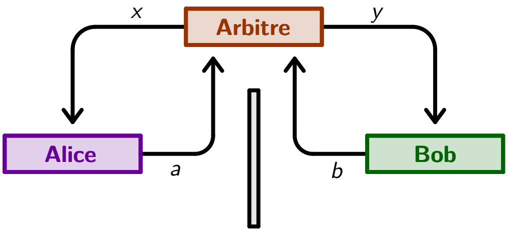


Le jeu CHSH



Gagner au jeu CHSH. $a \oplus b = x\, y$.

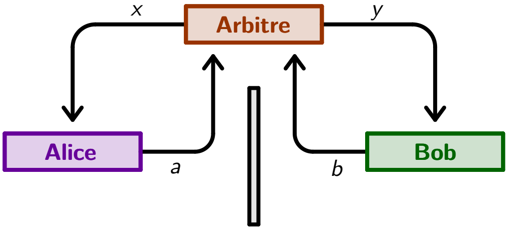
Le jeu CHSH



- **Stratégies déterministes.**

Gagner au jeu CHSH. $a \oplus b = x\,y$.

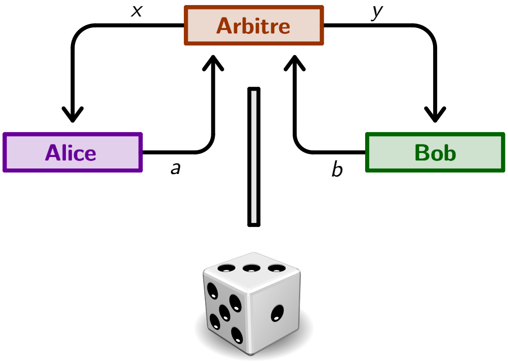
Le jeu CHSH



- **Stratégies déterministes.**
  $\rightsquigarrow \max \mathbb{P}(\text{gagner}) = 75\%$.

Gagner au jeu CHSH. $a \oplus b = x\,y$.

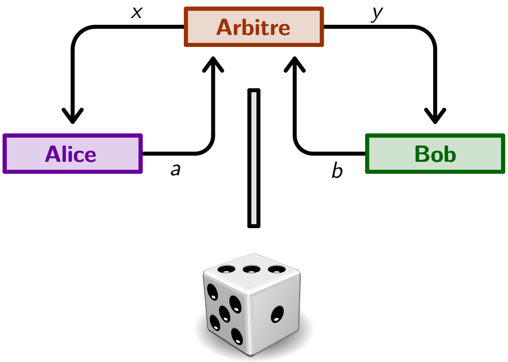
Le jeu CHSH



Gagner au jeu CHSH. $a \oplus b = x\, y$.

- **Stratégies déterministes.**
  $\rightsquigarrow \max \mathbb{P}(\text{gagner}) = 75\%$.
- **Stratégies classiques $\mathcal{L}$.**

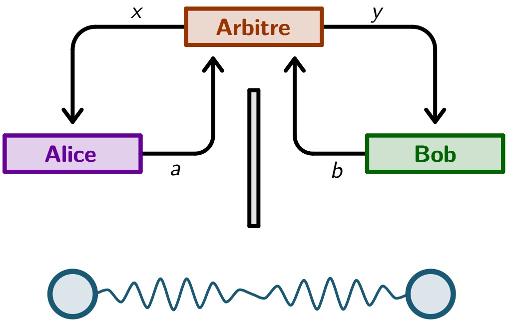
Le jeu CHSH



Gagner au jeu CHSH. $a \oplus b = x\,y$.

- **Stratégies déterministes.**
  $\rightsquigarrow \max \mathbb{P}(\text{gagner}) = 75\%$.
- **Stratégies classiques $\mathcal{L}$.**
  $\rightsquigarrow \max \mathbb{P}(\text{gagner}) = 75\%$.

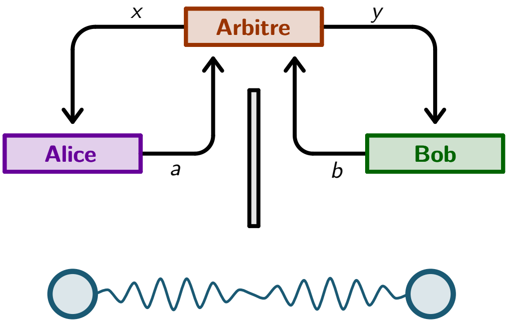
Le jeu CHSH



Gagner au jeu CHSH. $a \oplus b = x\,y$.

- **Stratégies déterministes.**
  $\rightsquigarrow \max \mathbb{P}(\text{gagner}) = 75\%$.
- **Stratégies classiques $\mathcal{L}$.**
  $\rightsquigarrow \max \mathbb{P}(\text{gagner}) = 75\%$.
- **Stratégies quantiques $\mathcal{Q}$.**

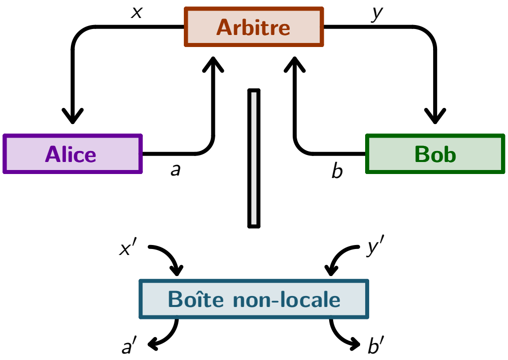
Le jeu CHSH



Gagner au jeu CHSH. $a \oplus b = x\,y$.

- **Stratégies déterministes.**
  $\rightsquigarrow \max \mathbb{P}(\text{gagner}) = 75\%$.
- **Stratégies classiques $\mathcal{L}$.**
  $\rightsquigarrow \max \mathbb{P}(\text{gagner}) = 75\%$.
- **Stratégies quantiques $\mathcal{Q}$.**
  $\rightsquigarrow \max \mathbb{P}(\text{gagner}) = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) \approx 85\%$.

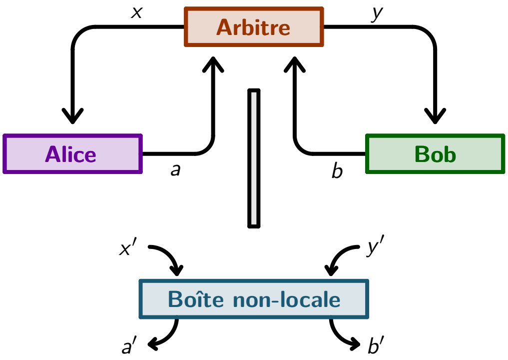
Le jeu CHSH



Gagner au jeu CHSH. $a \oplus b = x\,y$.

- **Stratégies déterministes.**
  $\rightsquigarrow \max \mathbb{P}(\text{gagner}) = 75\%$.
- **Stratégies classiques $\mathcal{L}$.**
  $\rightsquigarrow \max \mathbb{P}(\text{gagner}) = 75\%$.
- **Stratégies quantiques $\mathcal{Q}$.**
  $\rightsquigarrow \max \mathbb{P}(\text{gagner}) = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) \approx 85\%$.
- **Stratégies non-signallantes $\mathcal{NS}$.**

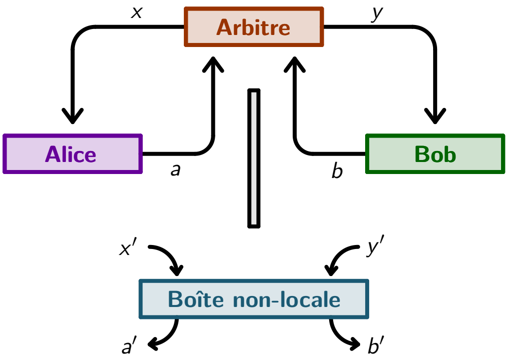
Le jeu CHSH



Gagner au jeu CHSH. $a \oplus b = x\, y$.

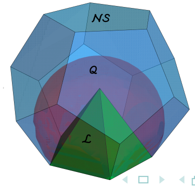
- **Stratégies déterministes.**
  $\rightsquigarrow \max \mathbb{P}(\text{gagner}) = 75\%$.
- **Stratégies classiques $\mathcal{L}$.**
  $\rightsquigarrow \max \mathbb{P}(\text{gagner}) = 75\%$.
- **Stratégies quantiques $\mathcal{Q}$.**
  $\rightsquigarrow \max \mathbb{P}(\text{gagner}) = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) \approx 85\%$.
- **Stratégies non-signallantes $\mathcal{NS}$.**
  $\rightsquigarrow \max \mathbb{P}(\text{gagner}) = 100\%$.

Le jeu CHSH

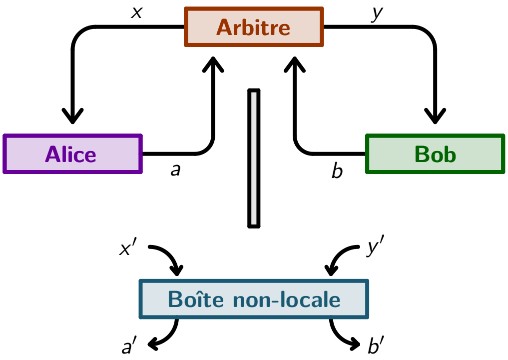


Gagner au jeu CHSH. $a \oplus b = x\, y$.

- **Stratégies déterministes.**
  $\rightsquigarrow$ $\max \mathbb{P}(\text{gagner}) = 75\%$.
- **Stratégies classiques $\mathcal{L}$.**
  $\rightsquigarrow$ $\max \mathbb{P}(\text{gagner}) = 75\%$.
- **Stratégies quantiques $\mathcal{Q}$.**
  $\rightsquigarrow$ $\max \mathbb{P}(\text{gagner}) = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) \approx 85\%$.
- **Stratégies non-signallantes $\mathcal{NS}$.**
  $\rightsquigarrow$ $\max \mathbb{P}(\text{gagner}) = 100\%$.

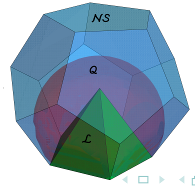


Le jeu CHSH



Gagner au jeu CHSH. $a \oplus b = x\,y$.
Gagner au jeu CHSH'. $a \oplus b = (x \oplus 1)\,(y \oplus 1)$.

- **Stratégies déterministes.**
  $\rightsquigarrow$ $\max \mathbb{P}(\text{gagner}) = 75\%$.
- **Stratégies classiques $\mathcal{L}$.**
  $\rightsquigarrow$ $\max \mathbb{P}(\text{gagner}) = 75\%$.
- **Stratégies quantiques $\mathcal{Q}$.**
  $\rightsquigarrow$ $\max \mathbb{P}(\text{gagner}) = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) \approx 85\%$.
- **Stratégies non-signallantes $\mathcal{NS}$.**
  $\rightsquigarrow$ $\max \mathbb{P}(\text{gagner}) = 100\%$.



— *Part* 2 —

Complexité de communication

Complexité de communication

Complexité de communication

Alice

Bob

Complexité de communication

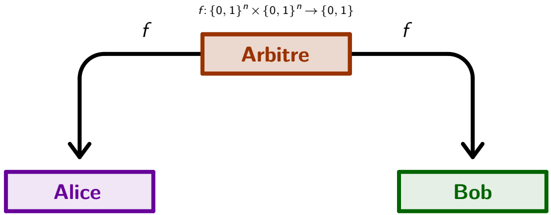
$f\colon \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \to \{0,1\}$

Arbitre

Alice

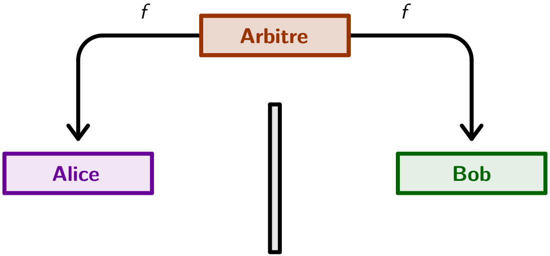
Bob

Complexité de communication

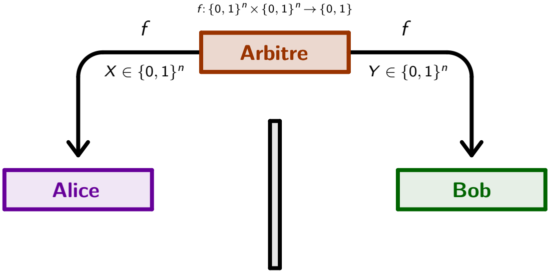


Complexité de communication

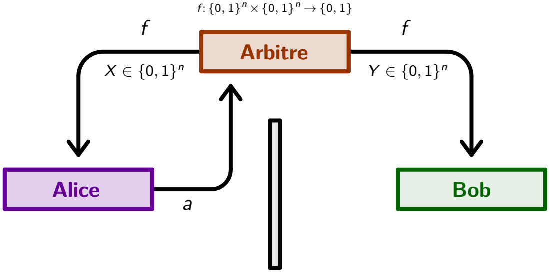
$f\colon \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \to \{0,1\}$



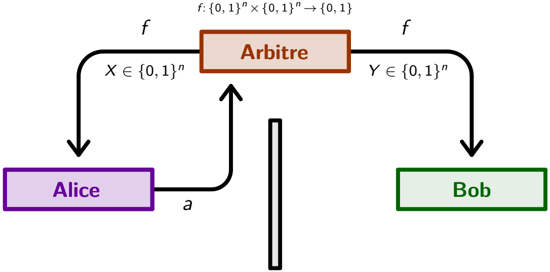
Complexité de communication



Complexité de communication

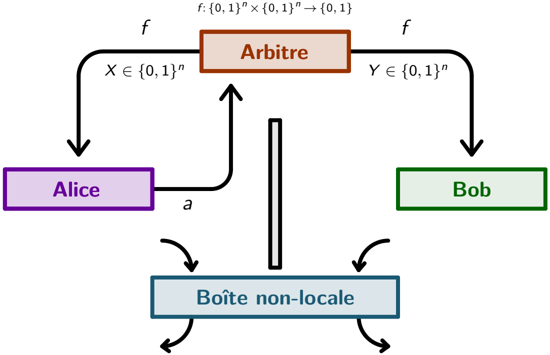


Complexité de communication



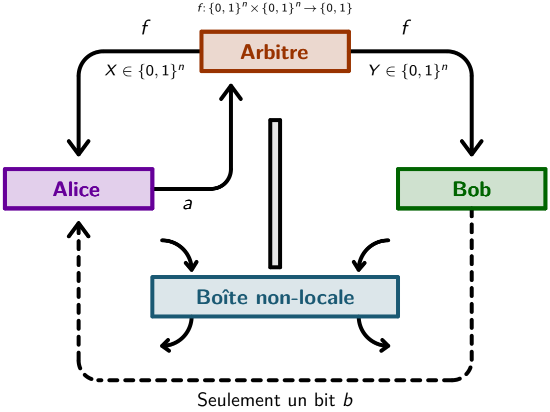
Gagner $\iff a = f(X, Y)$.

Complexité de communication



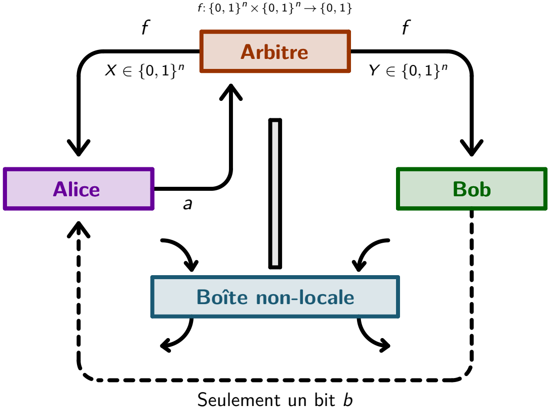
Gagner $\iff a = f(X, Y)$.

Complexité de communication



Gagner $\iff a = f(X, Y)$.

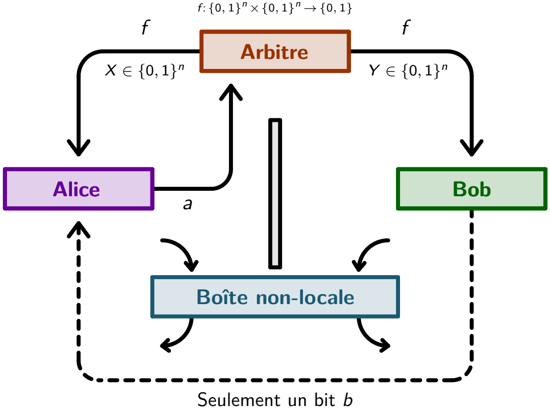
Complexité de communication



Gagner $\iff a = f(X, Y)$.

Déf. *Une fonction f est dite* **triviale** *(au sens de la complexité de communication) si Alice connaît n'importe quelle valeur $f(X, Y)$ avec seulement un bit de communication entre Alice et Bob.*

Complexité de communication

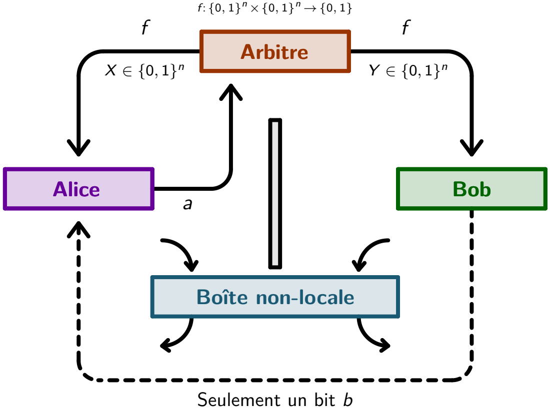


Gagner $\iff a = f(X,Y)$.

Déf. *Une fonction f est dite* **triviale** *(au sens de la complexité de communication) si Alice connaît n'importe quelle valeur $f(X,Y)$ avec seulement un bit de communication entre Alice et Bob.*

Ex. Pour $n = 2$, $X = (x_1, x_2)$, $Y = (y_1, y_2)$:

Complexité de communication



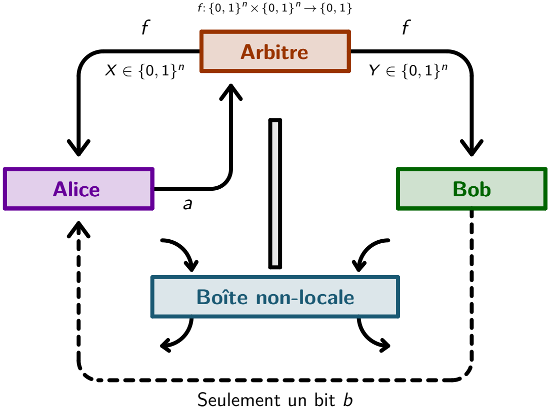
Gagner $\iff a = f(X, Y)$.

Déf. *Une fonction f est dite* **triviale** *(au sens de la complexité de communication) si Alice connaît n'importe quelle valeur $f(X, Y)$ avec seulement un bit de communication entre Alice et Bob.*

Ex. Pour $n = 2$, $X = (x_1, x_2)$, $Y = (y_1, y_2)$:

- $f := x_1 \oplus y_1 \oplus x_2 \oplus y_2 \oplus 1$ est triviale.

Complexité de communication



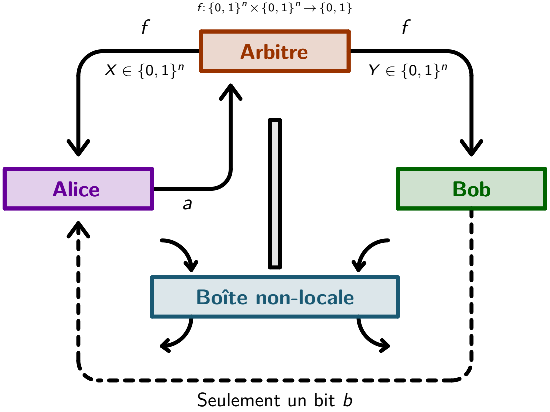
Gagner $\iff a = f(X, Y)$.

Déf. *Une fonction f est dite* **triviale** *(au sens de la complexité de communication) si Alice connaît n'importe quelle valeur $f(X, Y)$ avec seulement un bit de communication entre Alice et Bob.*

Ex. Pour $n = 2$, $X = (x_1, x_2)$, $Y = (y_1, y_2)$:

- $f := x_1 \oplus y_1 \oplus x_2 \oplus y_2 \oplus 1$ est triviale.
- $g := (x_1\, x_2) \oplus (y_1\, y_2)$ est triviale.

Complexité de communication



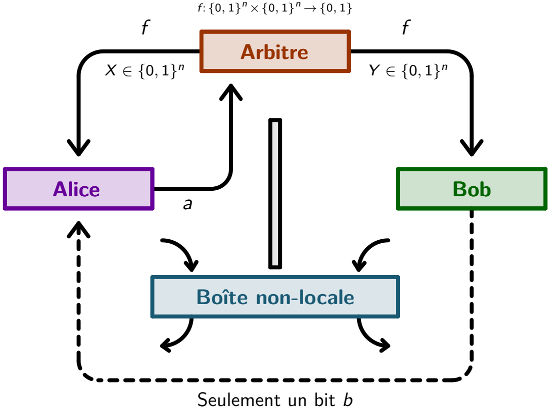
Gagner $\iff a = f(X, Y)$.

Déf. *Une fonction f est dite* **triviale** *(au sens de la complexité de communication) si Alice connaît n'importe quelle valeur $f(X,Y)$ avec seulement un bit de communication entre Alice et Bob.*

Ex. Pour $n = 2$, $X = (x_1, x_2)$, $Y = (y_1, y_2)$:

- $f := x_1 \oplus y_1 \oplus x_2 \oplus y_2 \oplus 1$ est triviale.
- $g := (x_1\, x_2) \oplus (y_1\, y_2)$ est triviale.
- $h := (x_1\, y_1) \oplus (x_2\, y_2)$ n'est PAS triviale.

Complexité de communication



Gagner $\iff a = f(X, Y)$.

Déf. *Une fonction f est dite* **triviale** *(au sens de la complexité de communication) si Alice connaît n'importe quelle valeur $f(X, Y)$ avec seulement un bit de communication entre Alice et Bob.*

Ex. Pour $n = 2$, $X = (x_1, x_2)$, $Y = (y_1, y_2)$:

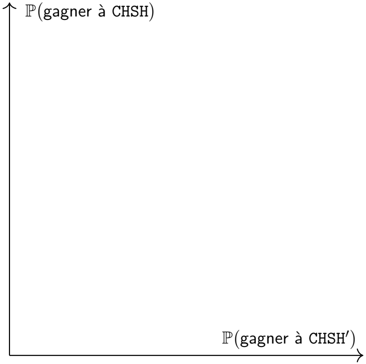
- $f := x_1 \oplus y_1 \oplus x_2 \oplus y_2 \oplus 1$ est triviale.
- $g := (x_1\, x_2) \oplus (y_1\, y_2)$ est triviale.
- $h := (x_1\, y_1) \oplus (x_2\, y_2)$ n'est PAS triviale.

Déf. *Une boîte* $\mathtt{P}$ *est dite* **effondrante** *(ou* triviale*) si en utilisant autant de copies de* $\mathtt{P}$ *que souhaité, n'importe quelle fonction Booléenne f est triviale avec probabilité $\geq q > \frac{1}{2}$ (où q est indep de f).*

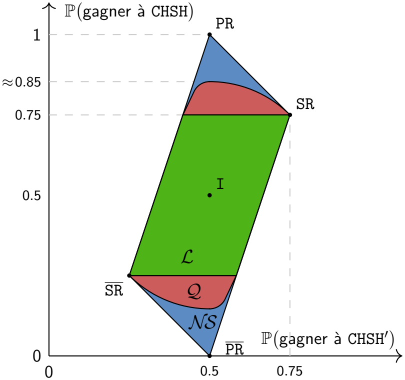
— *Part* 3 —

Lien entre ces deux notions

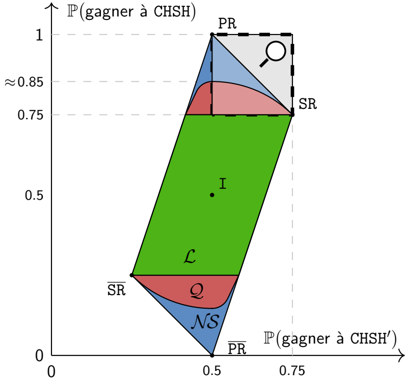
Avancées chronologiques



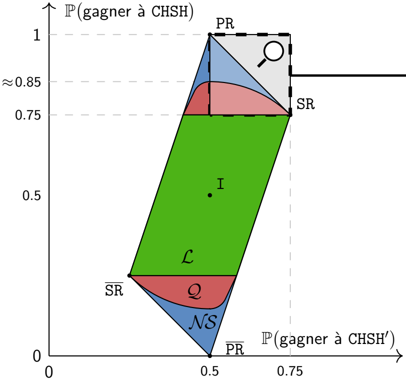
Avancées chronologiques

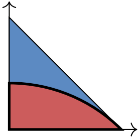


Avancées chronologiques



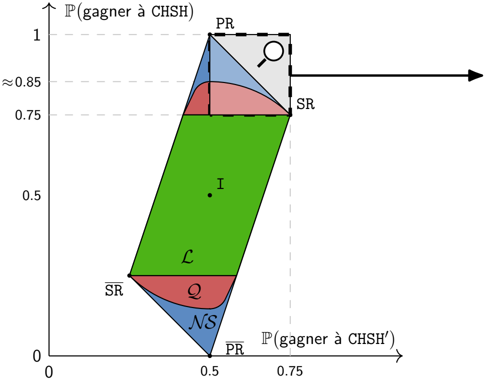
Avancées chronologiques

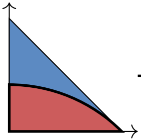




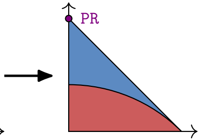
1999 : Les boîtes quantiques sont **non-effondrantes** [1].

Avancées chronologiques



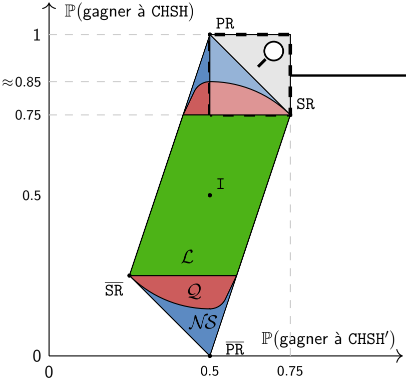


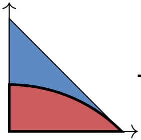
1999 : Les boîtes quantiques sont **non-effondrantes** [1].



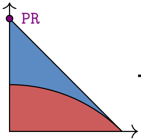
1999 : La boîte de PR est **effondrante** [2].

Avancées chronologiques

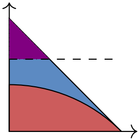




1999 : Les boîtes quantiques sont **non-effondrantes** [1].

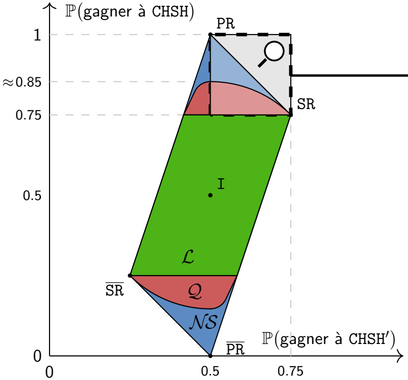


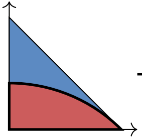
1999 : La boîte de PR est **effondrante** [2].



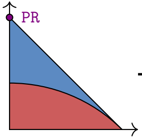
2006 : Région **effondrante** au-dessus de ≈ 0.91 [3].

Avancées chronologiques

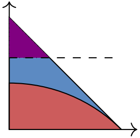




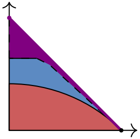
1999 : Les boîtes quantiques sont **non-effondrantes** [1].



1999 : La boîte de PR est **effondrante** [2].

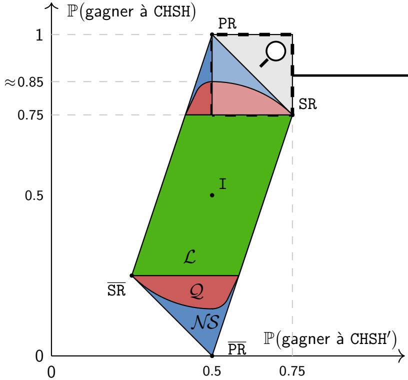


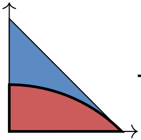
2006 : Région **effondrante** au-dessus de ≈ 0.91 [3].



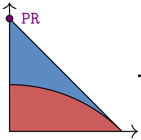
2009 : La diagonale "épaissie" est **effondrante** (résultat partiellement num.) [4].

Avancées chronologiques

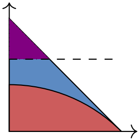




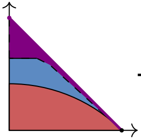
1999 : Les boîtes quantiques sont **non-effondrantes** [1].



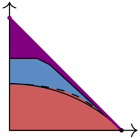
1999 : La boîte de PR est **effondrante** [2].



2006 : Région **effondrante** au-dessus de ≈ 0.91 [3].

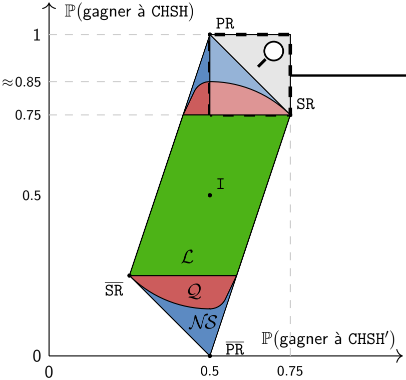


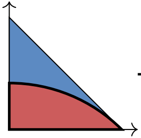
2009 : La diagonale “épaissie" est **effondrante** (résultat partiellement num.) [4].



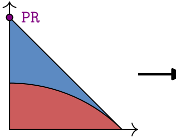
2015 : Les boîtes “presque quantiques" sont **non-effondrantes** [5].

Avancées chronologiques

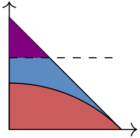




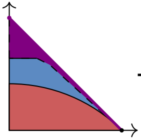
1999 : Les boîtes quantiques sont **non-effondrantes** [1].



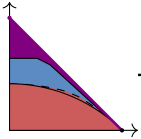
1999 : La boîte de PR est **effondrante** [2].



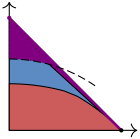
2006 : Région **effondrante** au-dessus de ≈ 0.91 [3].



2009 : La diagonale “épaissie" est **effondrante** (résultat partiellement num.) [4].



2015 : Les boîtes “presque quantiques" sont **non-effondrantes** [5].



2023 : Région **effondrante** au-dessus d'une ellipse (résultat analytique) [6].

Bibliographie

[1] R. Cleve, W. van Dam, M. Nielsen, and A. Tapp, *Quantum Entanglement and the Communication Complexity of the Inner Product Function.*
Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1999.

[2] W. van Dam, *Nonlocality & Communication Complexity.*
Ph.d. thesis., University of Oxford, Departement of Physics, 1999.

[3] G. Brassard, H. Buhrman, N. Linden, A. A. Méthot, A. Tapp, and F. Unger, "Limit on nonlocality in any world in which communication complexity is not trivial," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 96, p. 250401, Jun 2006.

[4] N. Brunner and P. Skrzypczyk, "Nonlocality distillation and postquantum theories with trivial communication complexity," *Physical Review Letters*, vol. 102, Apr 2009.

[5] M. Navascués, Y. Guryanova, M. J. Hoban, and A. Acín, "Almost quantum correlations," *Nature Communications*, vol. 6, no. 1, p. 6288, 2015.

[6] P. Botteron, A. Broadbent, and M.-O. Proulx, "Extending the known region of nonlocal boxes that collapse communication complexity," 2023.