BONUS :

⊛ Q: Différence entre série et suite ?

- Une série est une suite de la forme

$$\sum u_n \qquad \left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$$

← c'est une suite de nombres de la forme $(u_0, u_0+u_1, u_0+u_1+u_2, \dots)$

où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une autre suite

- Si cette suite converge, on appelle la limite "somme" et on la note :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \in \mathbb{C}$$

↑ c'est un nombre

- $$\|f\|_\infty := \sup_{x\in \text{Domaine}(f)} |f(x)|$$

- Critère de Riemann :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1$$

- Si $\sum u_n$ CVG, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

mais le contraire est faux

<u>Ex:</u> $u_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$ mais $\sum \frac{1}{n}$ DVG

- Si $a\,y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) = 0$

alors l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2 car l'EDO est d'ordre 2.

<u>TD 4. Exo 5 :</u>

1. On prend $x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,a_n t^{n-1} \\ x''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\,a_n\,t^{n-2} \end{cases}$$

On injecte dans l'équation homogène:

$$t^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\,a_n t^{n-2} - 2t \sum_{n=1}^{+\infty} n\,a_n t^{n-1}$$

$$+ 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 0\,t^n$$

On va sortir les premiers termes (pas besoin de faire le changement de variable ici, car on a de la chance, tous les termes sont déjà en t^n) :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^n - 2t \times \overset{n=1}{1 \times a_1 t^{1-1}} - 2\sum_{n=2}^{+\infty} n a_n t^n + \overset{n=0}{2a_0} + \overset{n=1}{2a_1 t} + 2\sum_{n=2}^{+\infty} a_n t^n = 0 + 0t + \sum_{n=2}^{+\infty} 0 t^n$$

On regroupe :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left[n(n-1) - 2n + 2 \right] a_n t^n - 2a_1 t + 2a_0 + 2a_1 t = 0 + 0t + \sum_{n=2}^{+\infty} 0 t^n$$

Par identification des coeff :

$$\begin{cases} \left[n(n-1) - 2n + 2 \right] a_n = 0 & \forall n \geq 2 \\ -2a_1 + 2a_1 = 0 \\ 2a_0 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_n = 0 & \forall n \geq 3 \\ 0 = 0 & \\ a_0 = 0 & \end{cases}$$

car en $n=2$ on a $n(n-1)-2n+2=0$

$\Rightarrow$ Les variables a_1 et a_2 sont libres, et on obtient :

$$x(t) = \underset{\in \mathbb{R}}{a_1} t + \underset{\in \mathbb{R}}{a_2} t^2$$

$\Rightarrow$ Une base de solutions est donnée par $\{t, t^2\}$

- Important : Suite géométrique

  $\sum_n q^n$ converge ssi $|q| < 1$,

  et sa limite est $\frac{1}{1-q}$.