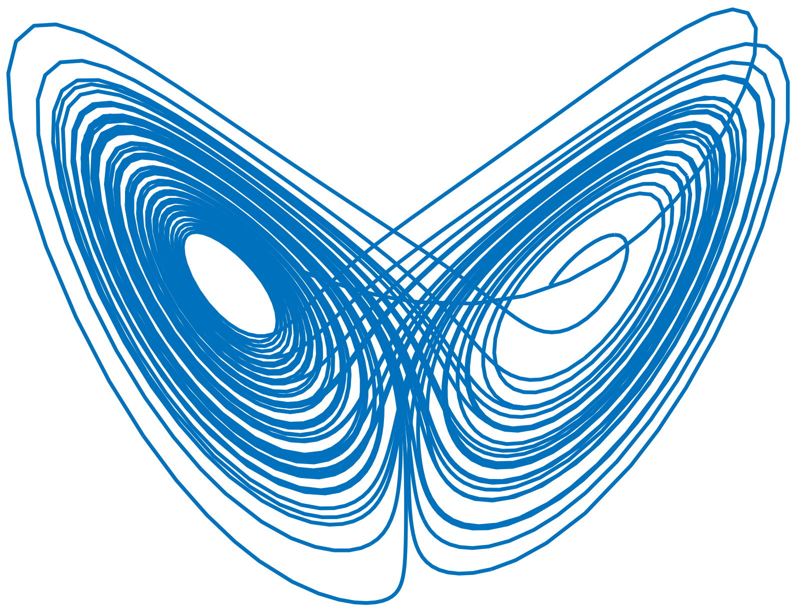
Outils Mathématiques pour l'Ingénieur

Equations Différentielles Ordinaires Linéaires



Informations pratiques

Enseignant Denis Arzelier : directeur de recherche au LAAS-CNRS

Contacts Tel : 05 61 33 64 76 - email : arzelier@laas.fr

Web-page https ://homepages.laas.fr/arzelier

Organisation du cours

❶ 10 cours 1h15 : 12h30

- ➪ cours magistral en amphi avec planches

❷ 10 séances TD 1h15 : 12h30

- ➪ Exercices d'application

❸ 1 examen final

Durée totale = 25h00

Prérequis

✔ Algèbre

❶ Décomposition en éléments simples Ex. : $\frac{p+1}{p^2(p-1)} = \frac{-2}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{2}{p-1}$

✔ Algèbre linéaire

❶ Calcul vectoriel et matriciel, espaces vectoriels et bases

❷ Produit scalaire et projection

❸ Valeurs propres, vecteurs propres $Av = \lambda v$, Ex. : $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

✔ Dérivation et intégration

❶ Dérivation

❷ Intégration / parties : $\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$, Ex. : $\int_0^\pi x \sin x \mathrm{d}x$

❸ Intégration / chang. de var. : $\int_a^b u(v(t))v'(t)\mathrm{d}t = \int_{v(a)}^{v(b)} u(x)\mathrm{d}x$, Ex. : $\int_1^e \frac{\ln^n(x)}{x}\mathrm{d}x$

Définition 1 *On appelle Equation Différentielle Ordinaire (ED0) toute relation entre une fonction y, ses dérivées successives et une variable indépendante x*

$$F(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n)}(x)) = 0$$

- La fonction y est une variable dépendante, (inconnue) de l'EDO
- L'ordre de l'EDO est n si la dérivée d'ordre le plus élevé est d'ordre n

  Ex. : $y''(x) + xy(x)y'^2(x) = \sin(x)$
- L'EDO est dite homogène si elle ne contient que des termes en y et ses dérivées

  Ex. : $y''(x) + xy(x)y'^2(x) = 0$
- L'EDO est dite linéaire si $F(\cdot)$ est linéaire par rapport à y et à toutes ses dérivées

  Ex. : $(x+1)y^{(3)}(x) + 2xy''(x) + xy'(x) = \sin(x)$
- L'EDO est dite linéaire à coefficients constants si $F(\cdot)$ est linéaire par rapport à y et à toutes ses dérivées et les coefficients ne dépendent pas de x

  Ex. : $y^{(3)}(x) + 2y''(x) + y'(x) + y(x) = \sin(x)$
- Un système d'EDO est une collection de plusieurs EDO avec plusieurs inconnues

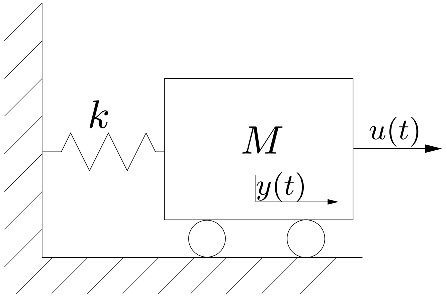
  Ex. : $\dot{x}_1(t) = x_2(t), \dot{x}_2(t) = x_1^2(t) + x_2(t)$

EDO - Deux exemples simples

✔ Système masse-ressort

$$\boxed{M\ddot{y}(t) + ky(t) = u(t)}$$

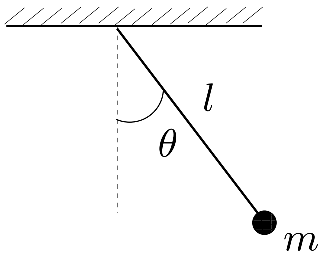
- EDO linéaire d'ordre 2 à coefficients constants non autonome
- Oscillateur linéaire non amorti à 1 degré de liberté (pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$)
- Vibration libre ($u \sim 0$) :



$$y(t) = \frac{\dot{y}_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) + y_0\cos(\omega_0 t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

- Energie : $M\frac{\dot{y}(t)^2}{2} + k\frac{y^2}{2} = M\frac{\omega_0^2 A}{2}$

✔ Pendule amorti



$$\boxed{\ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{l}\sin(\theta(t)) - \frac{k}{ml^2}\dot{\theta}(t)}$$

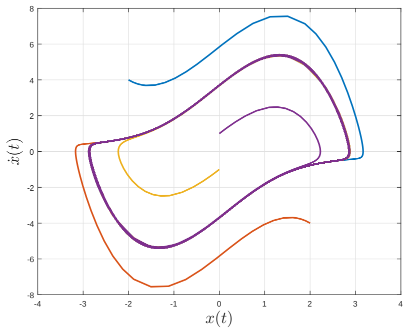
- EDO non linéaire d'ordre 2 à coefficients constants autonome ($\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$)
- Approximation petits angles : $\theta(t) = \theta_0 e^{-\xi\omega_0 t}\cos(\sqrt{1-\xi^2}\omega_0 t + \varphi)$, $\xi = -\frac{k}{2ml^2\omega_0}$

EDO - Quelques exemples classiques et historiques

- ✔ Oscillateur de Van der Pol (1926)

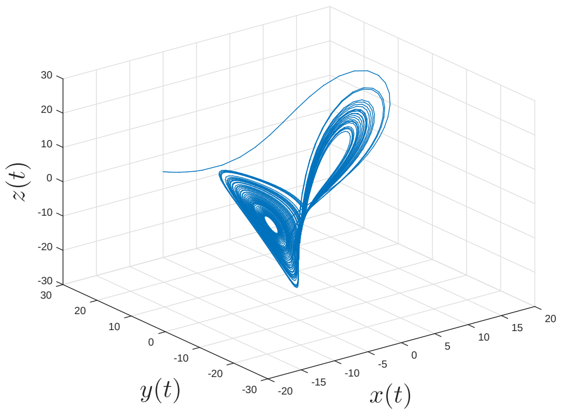
$$\boxed{\ddot{x}(t) - (\varepsilon - x^2(t))\dot{x}(t) + x(t) = 0}$$

  - Cycle limite défini par ε
  - Radios à tubes à vide (diode tunnel)
  - Oscillation à deux phases : 1 lente et 1 de relaxation rapide
  - Modélisation du battement cardiaque (1928)



B. Van der Pol (1889-1959)

- ✔ Attracteur étrange de Lorenz (1963)



$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sigma(y(t) - x(t)) \\ \dot{y}(t) &= rx(t) - y(t) - x(t)z(t) \\ \dot{z}(t) &= x(t)y(t) - bz(t) \end{aligned}}$$

  - Convection de Rayleigh-Bénard (atmosphère-terre)
  - Equations de Navier-Stokes en incompressible (Boussinesq)
  - σ nombre de Prandtl (10), r nombre de Rayleigh (28), b géométrie (8/3)

Définition 2 *Soit l'EDO* $F(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n)}(x)) = 0$ *d'inconnue* y *et définie sur l'intervalle* I

- *La fonction* $f : I \to \mathbb{R}$*, dont les dérivées d'ordre* n *existent, est une solution explicite de l'EDO sur* I *si* $F(x, f(x), f'(x), \cdots, f^{(n)}(x))$ *est définie sur* I *et* $F(x, f(x), f'(x), \cdots, f^{(n)}(x)) = 0$ *sur* I
- $g(x, y)$ *est une solution implicite de l'EDO sur* I *si* $g(x, y) = 0$ *définit au moins une fonction* $f : I \to \mathbb{R}$ *telle que* f *est une solution explicite de l'EDO*

Ex. :

- $y' = 2x$
- $yy' = -x$ et $g_1(x, y) = x^2 + y^2 - 25$ et $g_2(x, y) = x^2 + y^2 + 25$

✔ Famille paramétrée de solutions $y_c = x^2 + c$ (1 paramètre)

✔ Courbes intégrales $y = Y(x, c)$

✔ Méthodes de résolution

- Analytiques ou exactes
- Développement en séries infinies
- Graphiques
- Numériques

Définition 3 *Etant donné $y_0 \in \mathbb{R}$, le problème de Cauchy consiste à rechercher la solution y de l'équation différentielle du premier ordre vérifiant la condition initiale associée :*

$$y' = f(x, y), \; y(x_0) = y_0$$

où la fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue en x et y sur un domaine $D \ni x_0, y_0$ et la fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est différentiable sur un intervalle contenant x_0

Théorème 1 (Cauchy-Lipschitz) *Soit $\mathcal{O}$ un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}$. Si la fonction $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ est continue, Lipschitz uniformément*

$$\exists L > 0, \forall (x, y), (x, z) \in \mathcal{O} \times \mathcal{O}, |f(x, y) - f(x, z)| \leq L|y - z|$$

alors il existe $I \ni x_0$ t.q. le problème de Cauchy :

$$y' = f(x, y), \, \forall \, x \in I, \; y(x_0) = y_0$$

*a **une solution unique***

Ex. : $y' = y^{2/3}, y(0) = 0$

Définition 4 *On appelle équation différentielle ordinaire (EDO) linéaire du premier ordre, une équation différentielle de la forme :*

$$(E) \qquad a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f(x), \qquad x \in I \subset \mathbb{R}$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel les fonctions a, b et f sont données. Les fonctions a et b sont appelées coefficients de l'EDO et la fonction f second membre de l'EDO

Nota : La relation différentielle $F(y', y) = a(x)y'(x) + b(x)y(x)$ est linéaire ssi :

$$\begin{aligned} F(y_1' + y_2', y_1 + y_2) &= F(y_1', y_1) + F(y_2', y_2) \\ F(\alpha y', \alpha y) &= \alpha F(y', y), \; \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ex. et C.Ex. : $x^2 y'(x) + 2xy(x) = \cos(x)$ et $x^2 y(x)y'(x) + 2xy(x) = \cos(x)$

- L'équation (E) est dite homogène si le second membre f est identiquement nul : $f \equiv 0$.
  Ex. : $x^2 y'(x) + 2xy(x) = 0$
- (E) est dite à coefficients constants si les fonctions coefficients a et b sont constantes
  Ex. : $2y'(x) - y(x) = \sin(x)$

Définition 5 *Une EDO linéaire du premier ordre est dite sous forme normale si elle s'écrit comme :*

$$(E_N) \qquad y'(x) + p(x)y(x) = g(x), \qquad x \in I \subset \mathbb{R}$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel les fonctions p et g sont continues

Ex. : $y'(x) + 2x^2y(x) = x^3$

Nota : Si $a(x) \neq 0$, $x \in I$ alors (E) est équivalent à (E_N) avec $p(x) = b(x)/a(x)$ et $g(x) = f(x)/a(x)$

Définition 6

- *On appelle solution particulière d'une EDO linéaire du premier ordre (E) toute fonction y_p définie sur I vérifiant cette équation*
- *On appelle solution générale d'une EDO linéaire du premier ordre (E) la famille paramétrée à 1 paramètre (l'ensemble) de solutions y_c*

Ex. : $y'(x) - 2y(x) = 0$, $y_p(x) = e^{2x}$, $y_c(x) = ce^{2x}, \; c \in \mathbb{R}$

Théorème 2 *Soient les fonctions $a,\ b,\ f$ continues sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ définissant une EDO (E), linéaire du premier ordre, alors la solution générale $y(x)$ de (E) est donnée par :*

$$\boxed{y(x) = y_h(x) + y_p(x)}$$

où

- y_h *est une solution générale de l'EDO homogène* (E_h)
- y_p *est une solution particulière de l'EDO complète* (E)

Ex. : $y'(x) - y(x) = 3xe^{2x}$ avec $y(x) = ce^x + 3(x-1)e^{2x}$

Nota : Principe de superposition

Soient les fonctions a, b, f_1 et f_2 continues sur $I \subset \mathbb{R}$. Si y_{p_1} et y_{p_2} sont resp. solutions particulières des EDO $a(x)y' + b(x)y = f_1(x)$ et $a(x)y' + b(x)y = f_2(x)$ alors $y_p = \lambda_1 y_{p_1} + \lambda_2 y_{p_2}$ est solution particulière de l'EDO $a(x)y' + b(x)y = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$ pour λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$

EDO linéaires d'ordre 1 homogène : solution générale

Proposition 1

Soit I un intervalle où les fonctions a et b sont définies et continues et telles que $a(x) \neq 0, \forall\, x \in I$. La solution générale y_h de l'EDO homogène (E_h) :

$$(E_h)\; a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$$

est de la forme :

$$\boxed{y_h(x) = \lambda e^{u(x)}}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante arbitraire et $u'(x) = -\dfrac{b(x)}{a(x)}$ ($u(x)$ est une primitive de $-\dfrac{b(x)}{a(x)}$).

Si $y(x_0) = y_0$, avec $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, alors λ est fixé

Nota : L'ensemble des solutions de (E_h) est un espace vectoriel de dimension 1

Ex. : $y' + 2xy = 0$ avec $y_h = \lambda e^{-x^2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Principe :

- On va chercher une solution particulière sous la forme :

$$y_p(x) = \lambda(x)e^{u(x)}$$

- On injecte cette solution particulière dans l'équation (E) en calculant :

$$y_p'(x) = \lambda'(x)e^{u(x)} + \lambda(x)u'(x)e^{u(x)}$$

La fonction λ vérifie alors :

$$\lambda'(x) = \frac{f(x)}{a(x)}e^{-u(x)}$$

- On cherche une primitive quelconque de $\dfrac{f(x)}{a(x)}e^{-u(x)}$ afin de trouver $\lambda(x)$ et obtenir $y_p(x)$

$$\lambda(x) = \int_c^x \frac{f(s)}{a(s)}e^{-u(s)}\mathrm{d}s, \quad y_p(x) = e^{u(x)}\int_c^x \frac{f(s)}{a(s)}e^{-u(s)}\mathrm{d}s$$

Ex. : Pour $\sin(x)y' - \cos(x)y = x$, une solution particulière sur $I =]0, \dfrac{\pi}{2}[$ est donnée par

$$y_p(x) = -x\cos(x) + \sin(x)\ln(\sin(x))$$

EDO linéaires d'ordre 1 : solution particulière (II)

✔ Solution particulière de $ay' + by = f(x)$ sur I avec $a \neq 0$ (coefficients constants)

- Si $f(x) = \alpha\cos(x) + \beta\sin(x)$ alors $y_p(x) = c_1\cos(x) + c_2\sin(x)$
- Si $f(x) = e^{\lambda x}P_n(x)$

  1- si $\lambda \neq -\frac{b}{a}$ alors $y_p(x) = e^{\lambda x}Q_n(x)$

  2- si $\lambda = -\frac{b}{a}$ alors $y_p(x) = e^{\lambda x}xQ_n(x)$

  - Si $f_1(x) = \cos(\lambda x)P_n(x)$ ou $f_2(x) = \sin(\lambda x)P_n(x)$ alors on cherche une solution particulière complexe y_p^c de l'EDO $ay' + by = e^{i\lambda x}P_n(x)$

    1- $\Re(y_p^c)$ pour l'EDO avec f_1

    2- $\Im(y_p^c)$ pour l'EDO avec f_2

  - Si $f_1(x) = \mathrm{ch}(\lambda x)P_n(x)$ ou $f_2(x) = \mathrm{sh}(\lambda x)P_n(x)$ alors on cherche y_p^+ de l'EDO $ay' + by = e^{\lambda x}P_n(x)$ et y_p^- de l'EDO $ay' + by = e^{-\lambda x}P_n(x)$

    1- $y_p = \dfrac{y_p^+ + y_p^-}{2}$ pour l'EDO avec f_1

    2- $y_p = \dfrac{y_p^+ - y_p^-}{2}$ pour l'EDO avec f_2

<u>Ex. :</u> Pour $y' - y = e^{2x}(x^2+1)$, $y_p(x) = e^{2x}(x^2 - 2x + 3)$; pour $y' - y = \cos(2x)(x-1)$, $y_p(x) = (1/5)\left[\sin(2x)(2x - 6/5) - \cos(2x)(x - 8/5)\right]$

EDO non linéaires d'ordre 1 de Bernoulli

Définition 7 *Une équation différentielle de la forme :*

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x)y^n(x),\ n > 1$$

est appelée équation différentielle de Bernoulli

Théorème 3 *La transformation* $v(x) = y^{1-n}(x)$, $n > 1$ *réduit l'équation différentielle de Bernoulli à une EDO linéaire en* v *:*

$$v'(x) + P_1(x)v(x) = Q_1(x)$$

avec $P_1(x) = (1-n)P(x)$ *et* $Q_1(x) = (1-n)Q(x)$

Ex. : l'équation $y'(x) + y(x) = xy^3(x)$ est équivalente à l'équation $v'(x) - 2v(x) = -2x$ avec $v(x) = y^{-2}(x)$.
On obtient finalement :

$$v(x) = x + \frac{1}{2} + Ke^{2x} \quad \text{et} \quad y^2(x) = \frac{1}{x + \frac{1}{2} + Ke^{2x}}$$

Définition 8 *Une équation différentielle de la forme :*

$$y'(x) = P(x)y^2(x) + Q(x)y(x) + R(x)$$

est appelée équation différentielle de Riccati

Théorème 4 *La transformation* $z(x) = \dfrac{1}{y(x) - y_1(x)}$, $y_1(x)$ *solution particulière de l'équation de Riccati, réduit l'équation différentielle de Riccati à une EDO linéaire en* z *:*

$$z'(x) = P_1(x)z(x) + Q_1(x)$$

avec $P_1(x) = -Q(x) - 2P(x)y_1(x)$ *et* $Q_1(x) = -P(x)$

Ex. : l'équation $y'(x) + y^2(x) + \frac{1}{x}y(x) - \frac{4}{x^2} = 0$ a pour solution particulière $y_1(x) = \frac{2}{x}$. Le changement de variables $y(x) = y_1(x) + \frac{1}{z}$ transforme l'équation de Riccati initiale en l'équation $z'(x) = \frac{5z(x)}{x} + 1$. On obtient finalement :

$$z(x) = Kx^5 - \frac{1}{4}x \quad \text{et} \quad y(x) = \frac{2Kx^4 + \frac{1}{2}}{Kx^5 - \frac{1}{4}x}$$

Définition 9 *On appelle équation différentielle ordinaire (EDO) linéaire d'ordre n, une équation différentielle de la forme :*

$$(E_n) \qquad a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n(x)y(x) = f(x),\ x \in I \subset \mathbb{R}$$

où a_i, $i = 0, \cdots n$ et f sont données continues sur I telles que $a_0 \neq 0$. Les fonctions a_i, $i = 0, \cdots n$ sont appelées coefficients de l'EDO et la fonction f second membre de l'EDO

Nota : La relation différentielle $F(y^{(n)}, \cdots, y', y)$ est linéaire si et seulement si elle vérifie :

$$\begin{aligned} F(y_1^{(n)} + y_2^{(n)}, \cdots, y_1 + y_2) &= F(y_1^{(n)}, \cdots, y_1) + F(y_2^{(n)}, \cdots, y_2) \\ F(\alpha y^{(n)}, \cdots, \alpha y) &= \alpha F(y^{(n)}, \cdots, y),\ \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ex. et C.Ex. : $xy''(x) + x^3y'(x) + 2xy(x) = \cos(x)$ et
$y'(x)y^{(3)}(x) + y''(x) + x^3y(x)y'(x) + 2xy(x) = \cos(x)$

- L'équation (E_n) est dite homogène si le second membre f est identiquement nul : $f \equiv 0$.
  Ex. : $2xy''(x) + x^2y'(x) + 2xy(x) = 0$
- (E_n) est dite à coefficients constants si les fonctions a_i, $i = 0, \cdots n$ sont constantes.
  Ex. : $-y^{(3)} + y''(x) + 2y'(x) - y(x) = \sin(x)$

Théorème 5 *Soit l'EDO linéaire d'ordre n (E_n) où les fonctions a_i, $i = 0, \cdots n$ et f sont continues et $a_0(x) \neq 0$ sur I alors $\forall\, x_0 \in I$ et $c_0, \cdots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$, il existe une solution unique y de (E_n) définie sur I telle que :*

$$y(x_0) = c_0,\ y'(x_0) = c_1, \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0) = c_{n-1}$$

Ex. : $y''(x) + 2xy'(x) + x^3 y(x) = e^x$ avec $y(1) = 2 = c_0$ et $y'(1) = -5 = c_1$ a une solution unique sur $\mathbb{R}$

Corollaire 1 *Soit y une solution de l'EDO linéaire d'ordre n homogène (E_{nh}) telle que $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = 0$ pour $x_0 \in I$ alors $y(x) = 0$ pour $x \in I$*

Ex. : l'EDO $y^{(3)}(x) + 2y''(x) + 4xy'(x) + x^2 y(x) = 0$ avec $y(2) = y'(2) = y''(2) = 0$ a une solution unique $y(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Définition 10

- *On appelle solution particulière d'une EDO (E_n) toute fonction y_p définie sur I vérifiant cette équation*
- *On appelle solution générale d'une EDO (E_n) la famille à n paramètres de solutions y_c*

Ex. : Pour $y''(x) + y(x) = x$ alors $y_c(x) = c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x) + x$ et $y_p(x) = x$ sur $\mathbb{R}$

Théorème 6 *Soient a_i, $i = 0, \cdots n$ et f continues $I \subset \mathbb{R}$ définissant une EDO (E_n) linéaire d'ordre n, alors la solution générale $y(x)$ de (E) est donnée par :*

$$\boxed{y(x) = y_h(x) + y_p(x)}$$

- *y_h est une solution générale de l'EDO homogène (E_{nh})*
- *y_p est une solution particulière de l'EDO complète (E_n)*

Ex. : $y(x) = c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x) + x$ solution générale de $y''(x) + y(x) = x$ sur $\mathbb{R}$

Nota : Principe de superposition

Ex. : $y''(x) - 5y'(x) + 6y = 2 - 12x + 6e^x$ et $y_p(x) = -4/3 - 2x + 3e^x$

Soit $(E_{nh}) \qquad a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n(x)y(x) = 0$

Théorème 7 *principe de superposition*

Soient y_1, y_2, $\cdots$, y_m solutions de l'EDO linéaire homogène (E_{nh}) alors toute combinaison linéaire

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_my_m$$

est aussi une solution de l'EDO linéaire homogène (E_{nh}) pour c_1, c_2, $\cdots$, $c_m \in \mathbb{R}$

Ex. : Pour $y''(x) + y(x) = 0$, $\sin(x)$ et $\cos(x)$ sont 2 solutions donc $2\sin(x) + 3\cos(x)$ est une solution

Définition 11 f_1, f_2, $\cdots$, f_n *sont linéairement dépendantes sur I s'il existe c_1, c_2, $\cdots$, $c_n \in \mathbb{R}$ non toutes nulles telles que* $c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \cdots + c_nf_n(x) = 0, \ \forall\, x \in \ I$

A contrario, si $c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \cdots + c_nf_n(x) = 0, \ \forall\, x \in \ I$ implique $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ alors f_1, f_2, $\cdots$,f_n sont linéairement indépendantes

Ex. : x et $2x$ sont linéairement dépendantes sur $I = [0, 1]$ alors que x et x^2 sont linéairement indépendantes sur I

Proposition 2 *Soient a_i, $i = 1, 2, \cdots, n$ définies et continues sur I avec $a_0(x) \neq 0 \,\forall\, x \in I$*

L'EDO (E_{nh}) a toujours n solutions linéairement indépendantes et toute solution y est :

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x),$$

où $c_i \in \mathbb{R}$ et $y_1, y_2, \cdots, y_n$ sont n solutions linéairement indépendantes

Nota : L'ensemble des solutions de (E_{nh}) est un espace vectoriel de dimension n

Définition 12 *n solutions linéairement indépendantes de (E_{nh}) sont appelées solutions fondamentales de (E_{nh}) alors que toute fonction :*

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x), \;\forall\, x \in I$$

est une solution générale de (E_{nh}) sur I, $c_i \in \mathbb{R}$

Ex. : Pour $y''(x) + y(x) = 0$, $\sin(x)$ et $\cos(x)$ sont deux solutions indépendantes sur $\mathbb{R}$ alors

$y_h(x) = c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$

$y_p(x) = \sin(x + \pi/6)$ est une solution particulière sur $\mathbb{R}$

Définition 13 *Soient n fonctions réelles y_1, y_2, $\cdots$, y_n de classe C^{n-1} sur $I = [a, b]$*

On appelle Wronskien de ces n fonctions :

$$W(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Notation : $W(y_1, y_2, \cdots, y_n)(x)$ ou $W(y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x))$

Proposition 3 *Caractérisation de l'indépendance linéaire*

1. *Si $\exists\, x_0 \in I$, $W(y_1, \cdots, y_n)(x_0) = 0$ alors y_1, $\cdots$, y_n ne sont pas des solutions linéairement indépendantes de (E_{nh})*
2. *Si $\forall\, x \in I$, $W(y_1, \cdots, y_n)(x) \neq 0$ alors y_1, $\cdots$, y_n sont des solutions linéairement indépendantes de (E_{nh})*

Ex. : e^x, e^{-x} et e^{2x} sol. indépendantes de $y^{(3)} - 2y'' - y' + 2y = 0$ sur tout $I \subset \mathbb{R}$

EDO linéaires d'ordre n : solution particulière (I)

$$(E_n) \qquad a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n(x)y(x) = f(x),\ \forall x \in I$$

Méthode de la variation des constantes :

$$(E_2) \qquad a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = f(x),\ \forall x \in I$$

- ✔ Soit $y_h(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$ solution générale de (E_{2h})
- ✔ On cherche :

$$y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x)$$

On obtient :

$$y_p'(x) = A'(x)y_1(x) + B'(x)y_2(x) + A(x)y_1'(x) + B(x)y_2'(x)$$

- ✔ On impose :

$$A'(x)y_1(x) + B'(x)y_2(x) = 0$$

Alors,

$$y_p''(x) = A'(x)y_1'(x) + B'(x)y_2'(x) + A(x)y_1''(x) + B(x)y_2''(x)$$

à substituer dans (E_2)

EDO linéaires d'ordre n : solution particulière (II)

- On doit résoudre le système en $(A'(x), B'(x))$:

$$(S) \quad \begin{cases} y_1(x)A'(x) + y_2(x)B'(x) = 0 \\ y_1'(x)A'(x) + y_2'(x)B'(x) = \dfrac{f(x)}{a(x)}. \end{cases}$$

de déterminant le Wronskien $W(y_1(x), y_2(x)) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) \neq 0$

- Les solutions du système (S) sont données par :

$$A'(x) = -\frac{f(x)y_2(x)}{a(x)W(y_1(x), y_2(x))} \quad B'(x) = \frac{f(x)y_1(x)}{a(x)W(y_1(x), y_2(x))}.$$

- On obtient ainsi les fonctions $A(x)$ et $B(x)$ comme :

$$\boxed{A(x) = -\int_{c_1}^{x} \frac{f(u)y_2(u)}{a(u)W(y_1(u), y_2(u))}\mathrm{d}u \quad B(x) = \int_{c_2}^{x} \frac{f(u)y_1(u)}{a(u)W(y_1(u), y_2(u))}\mathrm{d}u}$$

- Une solution particulière de l'EDO (E_2) est alors donnée par :

$$\boxed{y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x)}$$

Ex. : Soit $y''(x) + y(x) = \tan(x)$ avec $y_h(x) = c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x)$ et donc
$y_p(x) = c_1(x) \sin(x) + c_2(x) \cos(x)$

On doit résoudre le système linéaire

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} c_1'(x) \sin(x) + c_2'(x) \cos(x) = 0 \\ c_1'(x) \cos(x) - c_2'(x) \sin(x) = \tan(x) \end{array} \right. \qquad W(\sin(x), \cos(x)) = \left| \begin{array}{cc} \sin(x) & \cos(x) \\ \cos(x) & -\sin(x) \end{array} \right| = -1$$

On obtient les deux solutions $c_1'(x) = \sin(x)$ et $c_2'(x) = \cos(x) - \dfrac{1}{\cos(x)}$

$c_1(x) = -\cos(x) + c_3$ et $c_2(x) = \sin(x) - \ln \left| \dfrac{1}{\cos(x)} + \tan(x) \right| + c_4$

Pour $c_3 = c_4 = 0$:

$$\begin{array}{rcl} y_p(x) & = & c_1(x) \sin(x) + c_2(x) \cos(x) \\ & = & -\cos(x) \sin(x) + \left(\sin(x) - \ln \left| \dfrac{1}{\cos(x)} + \tan(x) \right| \right) \cos(x) \\ & = & -\left(\ln \left| \dfrac{1}{\cos(x)} + \tan(x) \right| \right) \cos(x) \end{array}$$

$$(E_{2ch}) \qquad ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0,\ a, b, c \in \mathbb{R} \text{ et } a \neq 0$$

✔ $y = e^{rx}$, $r \in \mathbb{C}$ avec $y(x) = e^{rx},\ y'(x) = re^{rx},\ y''(x) = r^2 e^{rx}$

Si $y(x) = e^{rx}$ est solution de (E_{2ch}) alors r est une racine de l'équation caractéristique :

$$\boxed{ar^2 + br + c = 0}$$

Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ alors $r_1 \neq r_2$ réelles et :

$$y_h(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ constantes arbitraires}$$

Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ alors $r = \alpha + i\beta$ et $\bar{r} = \alpha - i\beta$ et :

$$y_h(x) = c_1 e^{rx} + c_2 e^{\bar{r}x}, \text{ avec } c_1,\ c_2 \in \mathbb{C}$$

ou $y_h(x) = e^{\alpha x}\left(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)\right)$ avec $A, B \in \mathbb{R}$

Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ alors $r = -\frac{b}{2a}$ (racine double) et

$$y_h(x) = (A + Bx)e^{rx} \text{ où } A \text{ et } B \text{ sont deux constantes arbitraires}$$

<u>Ex. :</u> Pour $y''(x) - 6y'(x) + 25y(x) = 0$, on a $y_h(x) = e^{3x}(c_1\sin(4x) + c_2\cos(4x))$

✔ Solution particulière de $ay'' + by' + cy = f(x)$ sur I avec $a \neq 0$

- Si $f(x) = \alpha\cos(x) + \beta\sin(x)$ alors $y_p(x) = c_1\cos(x) + c_2\sin(x)$
- Si $f(x) = e^{\lambda x} P_n(x)$

1- si $a\lambda^2 + b\lambda + c \neq 0$ alors $y_p(x) = e^{\lambda x} Q_n(x)$

2- si $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ **et** $2a\lambda + b \neq 0$ alors $y_p(x) = e^{\lambda x} x Q_n(x)$

3- si $\lambda = r_1 = r_2$ alors $y_p(x) = e^{\lambda x} x^2 Q_n(x)$

- Si $f_1(x) = \cos(\lambda x) P_n(x)$ ou $f_2(x) = \sin(\lambda x) P_n(x)$ alors on cherche une solution particulière complexe y_p^c de l'EDO $ay'' + by' + cy = e^{i\lambda x} P_n(x)$

  1- $\Re(y_p^c)$ pour l'EDO avec f_1

  2- $\Im(y_p^c)$ pour l'EDO avec f_2

- Si $f_1(x) = \mathrm{ch}(\lambda x) P_n(x)$ ou $f_2(x) = \mathrm{sh}(\lambda x) P_n(x)$ alors on cherche y_p^+ de l'EDO $ay'' + by' + cy = e^{\lambda x} P_n(x)$ et y_p^- de l'EDO $ay'' + by' + cy = e^{-\lambda x} P_n(x)$

  1- $y_p = \dfrac{y_p^+ + y_p^-}{2}$ pour l'EDO avec f_1

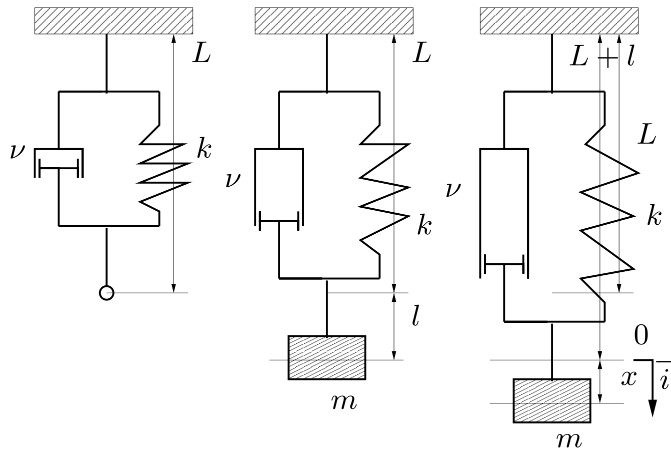
  2- $y_p = \dfrac{y_p^+ - y_p^-}{2}$ pour l'EDO avec f_2

Ex. : Pour $y'' + y' - y = e^{2x}(x^2 + 1)$, $y_p(x) = (1/5)e^{2x}(x^2 - 2x + (13/5))$

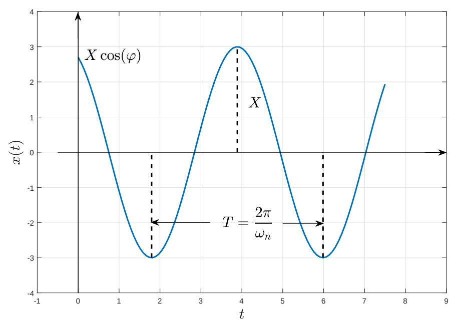
✔ Mise en équations :

- Loi de Hooke : $\overrightarrow{F_1}(t) = -k(x(t)+l)\overrightarrow{i}$
- Forces de gravité et de résistance : $\overrightarrow{F_2} = mg\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{F_3}(t) = -\nu\frac{dx(t)}{dt}\overrightarrow{i}$
- Force externe : $\overrightarrow{F_4}(t) = f(t)\overrightarrow{i}$
- Principe fondamental de la dynamique :

$$\boxed{m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \nu\frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = f(t)}$$



✔ Mouvement libre non amorti $f(t) = 0$ et $\nu = 0$: $m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + kx(t) = 0,\ x(0) = x_0,\ x'(0) = v_0$



$$\boxed{x_h(t) = \frac{v_0}{\omega_n}\sin(\omega_n t) + x_0\cos(\omega_n t) = X\cos(\omega_n t + \varphi)}$$

avec

Pulsation propre	Amplitude	Phase
$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$X = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2 + x_0^2}$	$\cos(\varphi) = \frac{x_0}{X},\ \sin(\varphi) = -\frac{v_0}{\omega_n X}$

✔ Mouvement libre amorti $f(t) = 0 : m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \nu\frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = 0,\ x(0) = x_0,\ x'(0) = v_0$

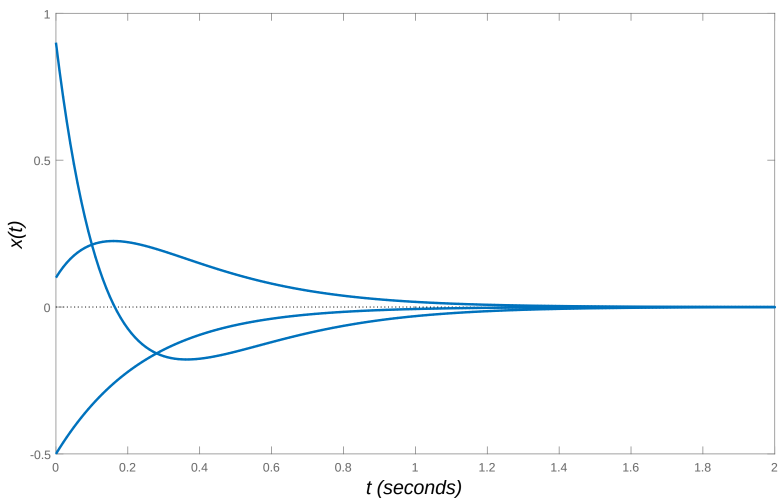
Forme Standard :

$$\boxed{\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\xi\omega_n\frac{dx(t)}{dt} + \omega_n^2 x(t) = 0,\ x(0) = x_0,\ x'(0) = v_0}$$

avec

Pulsation propre	Coefficient (facteur) d'amortissement
$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\xi = \frac{\nu}{2\sqrt{km}}$

❶ Amortissement critique $\xi = 1$ ou hyper-amortissement $\xi > 1$:



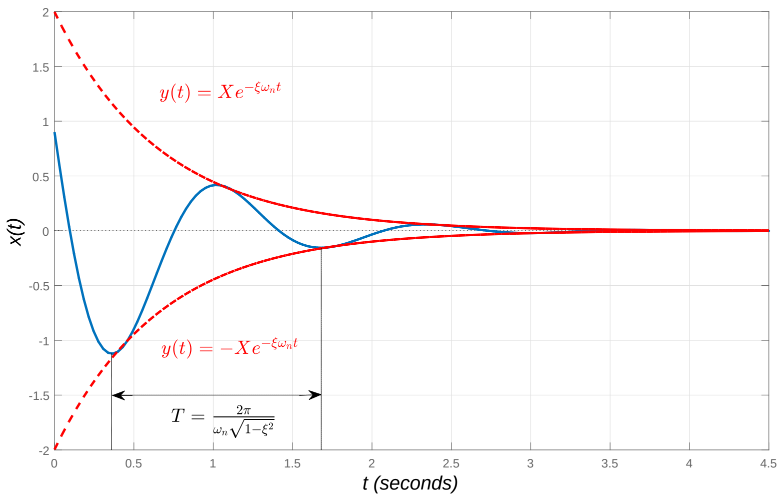
$$\boxed{\xi = 1\ :\ x_h(t) = (x_0 + (v_0 + \omega_n x_0)t)e^{-\omega_n t}}$$

Nota : $\xi \downarrow$ produit des oscillations de x

$$\boxed{\begin{aligned} \xi > 1\ :\quad x_h(t) &= \frac{(r_2x_0 - v_0)e^{r_1t} - (r_1x_0 - v_0)e^{r_2t}}{r_2 - r_1} \\ r_1 &= -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \\ r_2 &= -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \end{aligned}}$$

❷ Sous-amortissement $\xi < 1$:

$$\boxed{\begin{aligned} x_h(t) &= e^{-\xi\omega_n t}\left(\frac{\xi\omega_n x_0 + v_0}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t) + x_0\cos(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t)\right) \\ &= X\cos(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t + \varphi)e^{-\xi\omega_n t}\end{aligned}}$$



$$X = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\xi\omega_n x_0 + v_0}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}\right)^2}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{(\xi\omega_n x_0 + v_0)/(\omega_n\sqrt{1-\xi^2})}{\sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\xi\omega_n x_0 + v_0}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}\right)^2}}$$

$$\sin(\varphi) = -\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\xi\omega_n x_0 + v_0}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}\right)^2}}$$

✔ Mouvement forcé $f(t) = F\cos(\omega t)$: $m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \nu\frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = F\cos(\omega t),\ x(0) = x_0,\ x'(0) = v_0$

Forme Standard :

$$\boxed{\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\xi\omega_n\frac{dx(t)}{dt} + \omega_n^2 x(t) = E\cos(\omega t),\ x(0) = x_0,\ x'(0) = v_0}$$

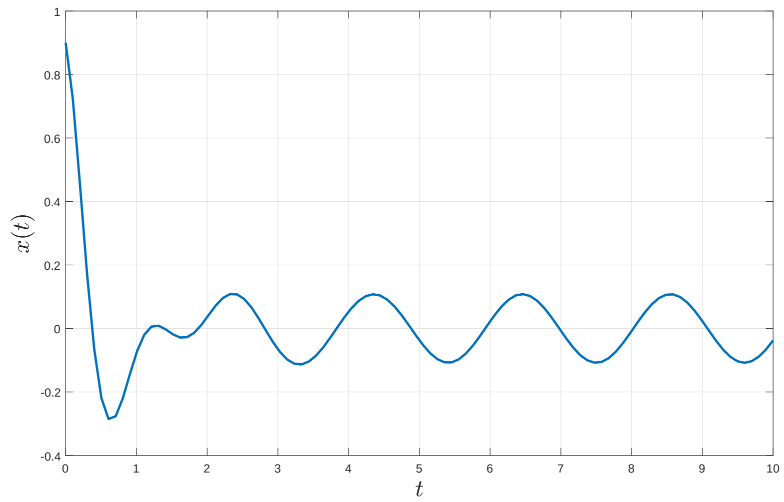
avec $E = F/m$ et $\xi < 1$

$$\boxed{x(t) \quad = \quad x_h(t) + x_p(t) = X\cos(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t + \varphi)e^{-\xi\omega_n t} + \frac{E}{\sqrt{(\omega_n^2-\omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_n^2\omega^2}}\cos(\omega t + \theta)}$$

où

$$\cos(\theta) \quad = \quad \frac{\omega_n^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_n^2-\omega^2)^2 + 4\xi^2\omega^2\omega_n^2}}$$

$$\sin(\theta) \quad = \quad -\frac{2\xi\omega_n\omega}{\sqrt{(\omega_n^2-\omega^2)^2 + 4\xi^2\omega^2\omega_n^2}}$$



✔ Phénomène de résonance :

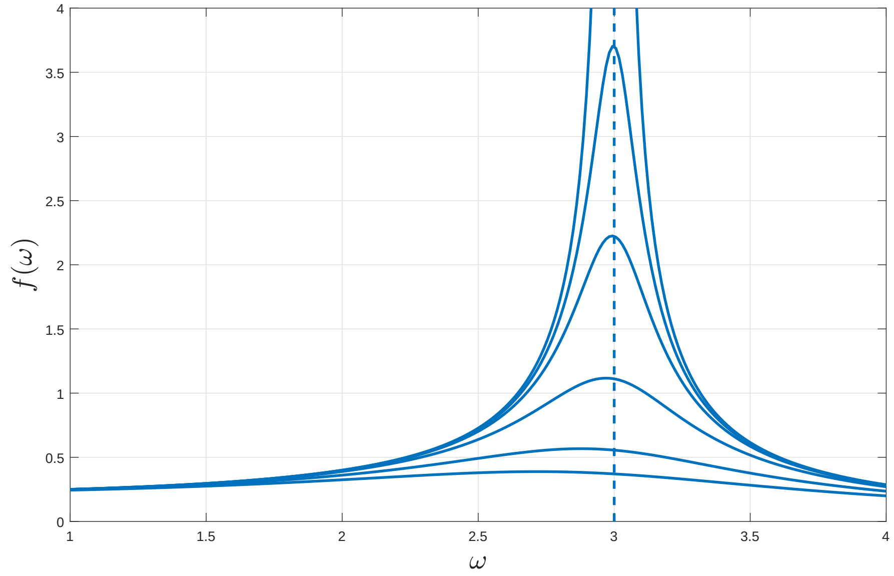
$$x_p(t) = \frac{E}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_n^2\omega^2}} \cos(\omega t + \theta) = f(\omega)\cos(\omega t + \theta)$$

$$f'(\omega) = \frac{-2E\omega\left[2\xi^2\omega_n^2 - (\omega_n^2 - \omega^2)\right]}{((\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega^2\omega_n^2)^{3/2}}$$

Pulsation de résonnance :

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1 - 2\xi^2} \underset{\xi \longrightarrow 0}{\rightarrow} \omega_n$$

$$f(\omega_r) = \frac{E}{2\xi\omega_n^2\sqrt{1 - \xi^2}} \underset{\xi \longrightarrow 0}{\rightarrow} +\infty$$



$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{ccc} \dfrac{dx_1}{dt} & = & a_{11}\,x_1 + \cdots + a_{1n}\,x_n + f_1(t), \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} & = & a_{n1}\,x_1 + \cdots + a_{nn}\,x_n + f_n(t) \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad X'(t) = AX(t) + F(t)$$

où :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad F(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Théorème 8 *Soient les fonctions $f_1, \cdots, f_n$ continues sur l'intervalle I, $t_0 \in I$ et n constantes réelles $x_1^0, \cdots, x_n^0$ alors le système (S) a une unique solution $X(t)$ telle que :*

$$X(t_0)^T = \begin{bmatrix} x_1(t_0) & \cdots & x_n(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^0 & \cdots & x_n^0 \end{bmatrix}$$

SDL à coefficients constants : solution générale

$$(S) \qquad X'(t) = AX(t) + F(t)$$

Théorème 9 *Soient f_i, $i = 1, \cdots n$ continues sur $I \subset \mathbb{R}$ définissant un SDL (S), alors la solution générale $X(t)$ de (S) est donnée par :*

$$\boxed{X(t) = X_h(t) + X_p(t)}$$

- X_h *est une solution générale du SDL homogène (S_h)*
- X_p *est une solution particulière du SDL complet (S)*

Ex. : Le SDL

$$\begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & 2x_1(t) - x_2(t) - 5t \\ x_2'(t) & = & 3x_1(t) + 6x_2(t) - 4 \end{array} \quad \text{a pour solution générale} \quad \begin{array}{rcl} x_1(t) & = & c_1 e^{5t} + c_2 e^{3t} + 2t + 1 \\ x_2(t) & = & -3c_1 e^{5t} - c_2 e^{3t} - t \end{array}$$

Proposition 4

(S_h) *possède* n *solutions linéairement indépendantes et toute solution* X *de* (S_h) *:*

$$X(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t) + \cdots + c_n X_n(t),$$

où $X_1, X_2, \cdots, X_n$ *sont* n *solutions linéairement indépendantes et* c_i *sont des constantes bien choisies. De plus,*

$$\boxed{X(t) = e^{At} X_0, \; X_0 = X(0) \in \mathbb{R}^n}$$

Proposition 5

n *solutions* $X_1, \cdots, X_n$ *de* (S_h) *sont linéairement indépendantes ssi* $\nexists t \in I$ *t.q. :*

$$W(X_1, \cdots, X_n)(t) = \left| \begin{array}{ccc} X_1(t) & \cdots & X_n(t) \end{array} \right| = 0$$

Ex. : Le SDL homogène précédent a pour solutions linéairement indépendantes $X_1^T(t) = \left[\begin{array}{cc} e^{5t} & -3e^{5t} \end{array} \right]$ et $X_2^T(t) = \left[\begin{array}{cc} e^{3t} & -e^{3t} \end{array} \right]$

Définition 14 *Exponentielle de matrice*

Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *alors* $\boxed{e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} = 1 + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \dots}$

Lemme 1 *Propriétés de l'exponentielle de matrice*

- *Si* A *est diagonalisable (*P *matrice de passage et* λ_i *valeurs propres de* A*) alors* $e^A = P \,\mathrm{diag}\left(e^{\lambda_i}\right)\, P^{-1}$
- $e^0 = I$
- *Si* $AB = BA$ *alors* $e^{A+B} = e^A\, e^B = e^B\, e^A$
- $(e^A)^{-1} = e^{-A}$
- $e^A\, A = A\, e^A$
- $\frac{d}{dt} e^{At} = A\, e^{At}$

Ex. : $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad e^{At} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -e^{5t} + 3e^{3t} & -e^{5t} + e^{3t} \\ 3e^{5t} - 3e^{3t} & 3e^{5t} - e^{3t} \end{bmatrix}$

Si A est diagonalisable, on a :

Proposition 6 *La solution générale de $X'(t) = AX(t)$ est de la forme :*

$$\boxed{X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} V_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \, e^{\lambda_i t} \, V_i}$$

où :

- λ_i sont les valeurs propres de A
- V_i sont les vecteurs propres associés $(V_1, \ldots, V_n)$ forme une base de vecteurs propres)
- c_i sont des constantes arbitraires réelles (ou $\in \mathbb{C}$ si $\lambda_i \in \mathbb{C}$)

Ex. : Le SDL homogène

$$\begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & 2x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) & = & 3x_1(t) + 6x_2(t) \end{array} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \ (\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 3), \ V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \ V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$X(t) = c_1 e^{5t} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{5t} + c_2 e^{3t} \\ -3c_1 e^{5t} - c_2 e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$(S) \qquad X'(t) = AX(t) + F(t)$$

Méthode de la variation de la constante :

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{At}X_0(t) \\ X'(t) &= Ae^{At}X_0(t) + e^{At}X_0'(t) \end{aligned}$$

En réinjectant dans (S), on a :

$$X_0'(t) = e^{-At}F(t)$$

La solution particulière est obtenue comme (c fixé) :

$$\boxed{X_p(t) = e^{At}X_0(t) = e^{At}\int_c^t e^{-Au}F(u)\mathrm{d}u}$$

Ex. :

$X_p = \begin{bmatrix} (-5/3)(t+1/3) \\ -(2/5) \end{bmatrix}$ est une solution particulière du SDL $\begin{aligned} x_1' &= 3x_1 + 5t \\ x_2' &= 5x_2 + 2 \end{aligned}$

$$(E_n) \qquad a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = f(t)$$

En posant : $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = y'(t)$, $\cdots$, $x_n(t) = y^{(n-1)}(t)$, on obtient $x_1'(t) = y'(t)$, $x_2'(t) = y''(t)$, $\cdots$, $x_n'(t) = y^{(n)}(t) = \dfrac{1}{a_0} f(t) - \dfrac{a_1}{a_0} y^{(n-1)}(t) - \cdots - \dfrac{a_{n-1}}{a_0} y'(t) - \dfrac{a_n}{a_0} y(t)$

Sous forme matricielle, le système ci-dessus s'écrit :

$$X'(t) = AX(t) + F(t)$$

avec :

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \qquad A = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I_{n-1} \\ \hline -\dfrac{a_n}{a_0} & -\dfrac{a_{n-1}}{a_0} \cdots -\dfrac{a_1}{a_0} \end{array}\right], \qquad F(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \dfrac{f(t)}{a_0} \end{bmatrix}$$

<u>Ex. :</u> $y^{(3)} + 2y'' - y = 2t$ devient le système $x_1'(t) = x_2(t),\ x_2'(t) = x_3(t),\ x_3'(t) = x_1(t) - 2x_3(t) + 2t$