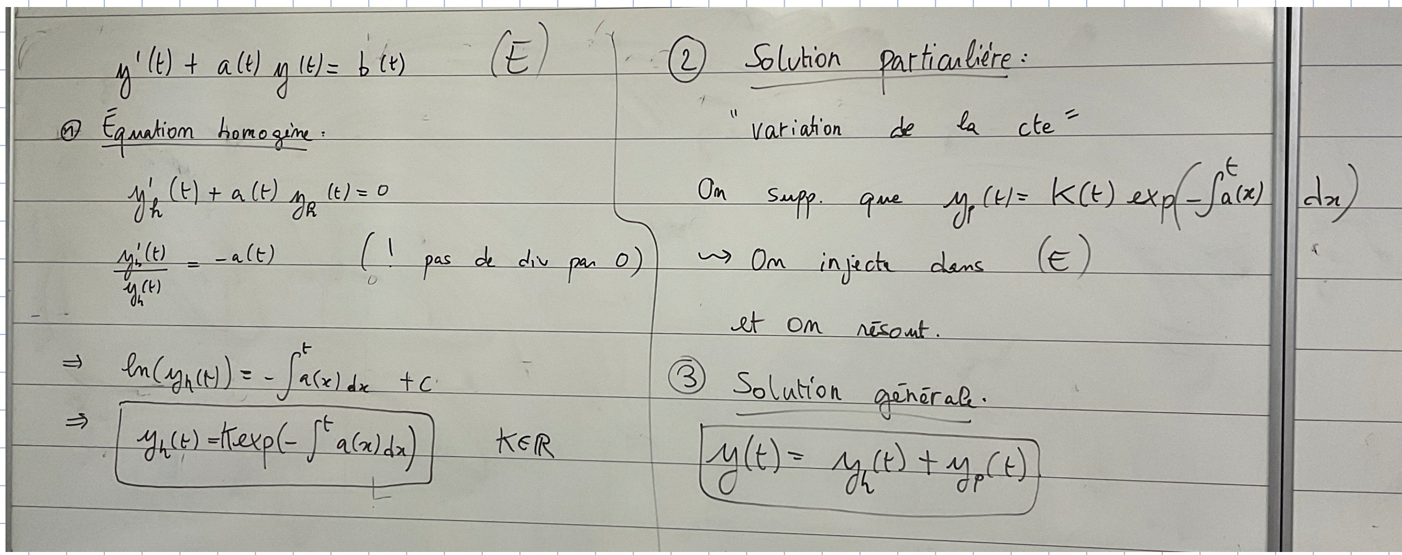


$y'(t) + a(t)\,y(t) = b(t)$ (E)

① Équation homogène :

$y_h'(t) + a(t)\,y_h(t) = 0$

$\frac{y_h'(t)}{y_h(t)} = -a(t)$ (! pas de div par 0)

$\Rightarrow \ln(y_h(t)) = -\int^t a(x)\,dx + C$

$\Rightarrow \boxed{y_h(t) = K\exp\left(-\int^t a(x)\,dx\right)}$ $K \in \mathbb{R}$

② Solution particulière :

"variation de la cte"

On supp. que $y_p(t) = K(t)\exp\left(-\int^t a(x)\,dx\right)$

⇝ On injecte dans (E)

et on résout.

③ Solution générale.

$\boxed{y(t) = y_h(t) + y_p(t)}$

Exercice 1 : (2 février 2024)

1. $y' + 2y = e^t$

* $\underline{EH}$: $y_H' + 2y_H = 0 \Rightarrow \boxed{y_H = Ke^{-2t}}$

* $\underline{EP}$: méthode de la variation de la constante.

$y_p = K(t)e^{-2t}$

$y_p' = K'(t)e^{-2t} - 2K(t)e^{-2t}$

on injecte : $K'(t)e^{-2t} - \cancel{2K(t)e^{-2t}} + \cancel{2K(t)}e^{-2t} = e^t$

$\Leftrightarrow K'(t) = \frac{e^t}{e^{-2t}} = e^t e^{2t} = e^{3t}$

$K(t) = \frac{1}{3}e^{3t} + \alpha \qquad \alpha \in \mathbb{R}$

donc on a : $y_p(t) = \left(\frac{1}{3}e^{3t} + \alpha\right)e^{-2t}$

* $\underline{SG}$:

$y(t) = y_H(t) + y_p(t)$

$\Leftrightarrow y(t) = Ke^{-2t} + \left(\frac{1}{3}e^{3t} + \alpha\right)e^{-2t}$ $\qquad k = K + \alpha \in \mathbb{R}$

e^t

$\Leftrightarrow \boxed{y(t) = k e^{-2t} + \frac{1}{3}e^t}$

(2) $y' - y = e^t$ (E)

* Éq homogène : $y' - y = 0 \Rightarrow \boxed{y_h = k e^t}$
* Solution particulière :

$y_p(t) = K e^t$ et $y_p'(t) = K' e^t + K e^t$

dans (E) :

$K' e^t + K e^t - K e^t = e^t$

$\Rightarrow K' e^t = e^t \Rightarrow K' = 1$

On intègre K' : $\boxed{K = t}$

$\boxed{y_p = t e^t}$

* Solution générale :

$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = k e^t + t e^t$

$\boxed{y(t) = (k + t) e^t}$ $k \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$

(3) $y' + ty = t$

homogène : $K e^{-\frac{1}{2}t^2} = y_h(t)$

sol particulière

$y_p(t) = K(t) e^{-\frac{1}{2}t^2}$

$y_p'(t) = (K'(t) - K(t) \cdot t) e^{-\frac{1}{2}t^2}$

On injecte $y' + ty = t$

$K'(t) e^{-\frac{1}{2}t^2} = t$

$K'(t) = t e^{\frac{1}{2}t^2}$

$$K(t) = e^{\frac{1}{2}t^2}$$

$$y(t) = Ke^{-\frac{1}{2}t^2} + \underbrace{e^{\frac{1}{2}t^2} e^{-\frac{1}{2}t^2}}_{=1}$$

$$\boxed{= Ke^{-\frac{1}{2}t^2} + 1}$$

$K \in \mathbb{R}$

$t \in \mathbb{R}$

4) $y' + y = \cos(t)$

EH : $y_H' + y_H = 0 \Rightarrow \frac{y_H'}{y_H} = -1 \Rightarrow y_H(t) = Ke^{-t}$

SP :

On pose $y_p(t) = A\cos(t) + B\sin(t)$

$y_p'(t) = -A\sin(t) + B\cos(t)$

$\Rightarrow (A+B)\cos(t) + (B-A)\sin(t) = \cos(t)$

$\Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ B-A=0 \end{cases} \Rightarrow 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2} = B$

$\Rightarrow y_p(t) = \frac{1}{2}(\cos(t) + \sin(t))$

$\Rightarrow y(t) = \boxed{\frac{1}{2}(\cos(t) + \sin(t)) + Ke^{-t}}$ $\quad (t, K) \in \mathbb{R}^2$

⑤ $y' + \tan(t)\, y = 1$

Solution homogène : $y_h = K e^{+\ln|\cos t|}$

$y_h = K|\cos(t)| = K\cos(t)$

car $t \in]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$

Solution particulière :

$y_p = K\cos(t)$

$y'_p = K'\cos(t) - K\sin(t)$

$K'\cos(t) - K\sin(t) + \underbrace{\tan(t) \times K \times \cos(t)}_{K\sin(t)} = 1$

$K'\cos(t) = 1$

$K' = \frac{1}{\cos(t)} \longrightarrow K = \ln\left(\tan\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$

astuce $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ (changement de variable)

$$\boxed{y(t) = K\cos(t) + \ln\left(\tan\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)\cos(t)}$$

$K \in \mathbb{R}$ $\quad t \in]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$

Exercice ② : (6 février 2024)

1.1 ⊛ Équation Homogène : $y_h'(t) + \frac{1}{t} y_h(t) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{y_h'(t)}{y_h(t)} = -\frac{1}{t}$ $\quad \int$

sur $]0, +\infty[$: $\ln(t)$

sur $]-\infty, 0[$: $\ln(|t|)$

$\Leftrightarrow \ln(y_h(t)) = -\ln(|t|) + c$

$\Leftrightarrow \ln(y_h(t)) = \ln\left(\frac{1}{|t|}\right) + c$

$\Leftrightarrow y_h(t) = e^{\ln\left(\frac{1}{|t|}\right) + c} = \frac{1}{|t|} e^c$

$\Leftrightarrow \boxed{y_h(t) = K\frac{1}{|t|}} = \begin{cases} K/t & \text{si } t \in I_1 \\ -K/t & \text{si } t \in I_2 \end{cases}$

⊛ Equation Particulière :

$$k'(t)\frac{1}{|t|} - k(t)\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t}k(t)\frac{1}{|t|} = \frac{2}{t^2+1}$$

∘ pour $t\in]0,+\infty[$ $\quad k'(t)\frac{1}{t} - k(t)\frac{1}{t^2} + k(t)\frac{1}{t^2} = \frac{2}{t^2+1}$

$t\in I_1$ $\quad \boxed{y_p(t) = \ln(t^2+1)\cdot\frac{1}{t}}$

∘ pour $t\in]-\infty,0[$ $\quad y_p(t) = k(t)\frac{1}{|t|} = -k(t)\frac{1}{t}$

$$y_p'(t) = -k'(t)\frac{1}{t} + k(t)\frac{1}{t^2}$$

on injecte :

$$-k'(t)\frac{1}{t} + \cancel{k(t)\frac{1}{t^2}} - \frac{1}{t}\cancel{k(t)}\frac{1}{t} = \frac{2}{t^2+1}$$

$\Leftrightarrow \quad k'(t) = -\frac{2t}{t^2+1}$

$\Rightarrow \quad k(t) = -\ln(t^2+1) =$

pour $t\in I_2$ on a $y_p(t) = -\ln(t^2+1)\frac{1}{-t} = \boxed{\ln(t^2+1)\frac{1}{t}}$

⊛ Solution générale :

$$\boxed{y(t) = \frac{K}{|t|} + \frac{1}{t}\ln(t^2+1))}$$

$K\in\mathbb{R}$

$t\in\mathbb{R}^*$ $(I_1\cup I_2)$

1.2

Règle de l'Hôpital : si $f,g : [a,b[\to\mathbb{R}$ sont dérivables en a et que $f(a)=0=g(a)$ et que $g'(a)\neq 0$, alors $\lim_{t\to a^+}\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$

On prend $k=0$ donc $g(t) = \frac{\ln(t^2+1)}{t}$

ici $f(t) = \ln(t^2+1)$

$g(t) = t$

$g(0) = 0$

$$\begin{cases} g'(t) = 1 \text{ donc } g'(0) = 1 \\ f(0) = \ln(1) = 0 \\ f'(t) = \frac{2t}{t^2+1} \quad f'(0) = 0 \end{cases}$$

$\cdot \lim\limits_{t \to 0^+} \frac{f(t)}{g(t)} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{0}{1} = 0$

$\cdot \lim\limits_{t \to 0^-} \frac{f(t)}{g(t)} = \frac{0}{1} = 0$

Donc g se prolonge de manière continue en 0

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{g(t) - g(0)}{t - 0} \quad \frac{\lim\limits_{t \to 0^+} \frac{\ln(t^2+1)}{t} - 0}{t}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t \to 0^+} \frac{\ln(t^2+1)}{t^2} \sim \frac{t^2}{t^2} = 1$$

Pareil pour $\lim\limits_{t \to 0^-}$

Donc y est dérivable en 0 et

$y'(0)=1$

(Pour $K\neq 0$, $y(t)$ n'est pas prolongeable en 0. C'est pourquoi la solution sur $\mathbb{R}$ tout entier est unique, seulement pour $K=0$).

2.

Sur I_1 : $y_1(t) = K_1 t + t\ln(t)$ $(K_1\in\mathbb{R})$

Sur I_2 : $y_2(t) = K_2 t + t\ln(-t)$ $(K_2\in\mathbb{R})$

On a un prolongement continu en 0 :

$$\lim_{t\to 0^+} y_1(t) = 0 = \lim_{t\to 0^-} y_2(t)$$

Mais pas dérivable car :

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{y_1(t)-y_1(0)}{t-0} = -\infty \quad \forall K_1 \ldots$$

$\Rightarrow$ NON

EXO 3 :

$\boxed{1}$ $y_{C_1}(t) = C_1 t^2 + t$ pour $t\in I_1$, $C_1\in\mathbb{R}$

$y_{C_2}(t) = C_2 t^2 + t$ pour $t\in I_2$, $C_2\in\mathbb{R}$

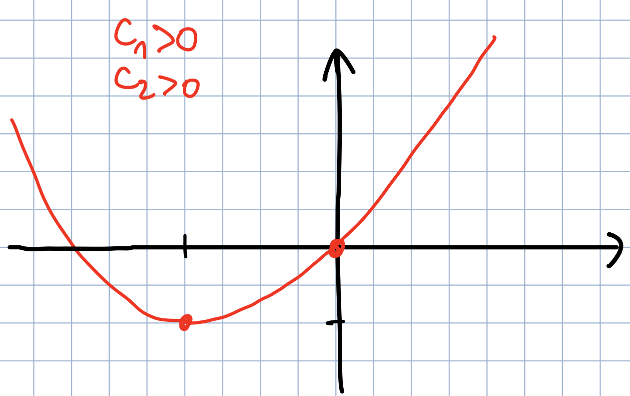
$\boxed{2}$ $\lim_{t\to 0} y_{C_i}(t) = 0 \quad \forall i$

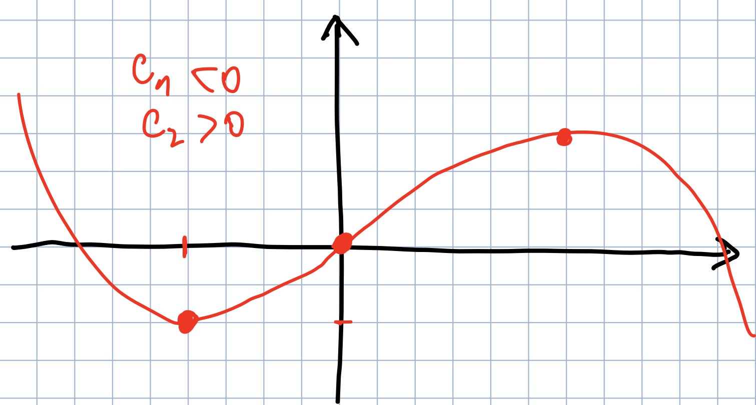
$$\lim_{t \to 0} \frac{y_{c_i}(t) - y_{c_i}(0)}{t - 0} = 1 \quad \forall i$$

$\Rightarrow$ prolongement dérivable sur $\mathbb{R}$

3 $\quad y_{c_i}(t) = c_i \left(\left(t + \frac{1}{2c_i}\right)^2 - \frac{1}{4c_i^2} \right) \qquad (c_i \neq 0)$

$\rightarrow$ On a des paraboles de sommet $\left(-\frac{1}{2c_i} ; -\frac{1}{4c_i}\right)$





Exo 4 :

Rappels : (Riccati) cours de Denis Arzelier (page 16)

Définition 8 *Une équation différentielle de la forme :*

$$y'(x) = P(x)y^2(x) + Q(x)y(x) + R(x)$$

est appelée équation différentielle de Riccati

Théorème 4 *La transformation* $z(x) = \dfrac{1}{y(x) - y_1(x)}$, $y_1(x)$ *solution particulière de l'équation de Riccati, réduit l'équation différentielle de Riccati à une EDO linéaire en* z *:*

$$z'(x) = P_1(x)z(x) + Q_1(x)$$

avec $P_1(x) = -Q(x) - 2P(x)y_1(x)$ *et* $Q_1(x) = -P(x)$

Ex. : l'équation $y'(x) + y^2(x) + \frac{1}{x}y(x) - \frac{4}{x^2} = 0$ a pour solution particulière $y_1(x) = \frac{2}{x}$. Le changement de variables $y(x) = y_1(x) + \frac{1}{z}$ transforme l'équation de Riccati initiale en l'équation $z'(x) = \frac{5z(x)}{x} + 1$. On obtient finalement :

$$z(x) = Kx^5 - \frac{1}{4}x \quad \text{et} \quad y(x) = \frac{2Kx^4 + \frac{1}{2}}{Kx^5 - \frac{1}{4}x}$$

$\boxed{1}$ $\quad y(x) = \dfrac{x+1}{x+K}$ avec $K \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{-K\}$.

$\boxed{2}$ $\quad y(x) = \dfrac{1}{K|x|^{2/3}+x} + \dfrac{1}{x}$ sur $\underbrace{x>0 \text{ et } K \in \mathbb{R}}_{\text{par exemple}}$