TD 2

(6 février 2024)

Méthode :

Équation Différentielle Ordinaire d'ordre 2, à coeff. constants

$$a\, y''(t) + b\, y'(t) + c\, y(t) = f(t) \qquad (E)$$

① Solutions Homogènes :

- On calcule l'équation caractéristique :

$$a r^2 + b r + c = 0$$

- On trouve r avec le discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\hookrightarrow \quad r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

[Rmq : " $\sqrt{-1} = i$ "]

$\Rightarrow$ la solution homogène :

$$\boxed{y_h(t) = A\, y_1(t) + B\, y_2(t)} \qquad (A, B \in \mathbb{R})$$

où $y_1(t) = \begin{cases} e^{r_1 t} & \text{si } \Delta > 0 \\ e^{r_1 t} & \text{si } \Delta = 0 \\ \exp(\mathrm{Re}(r_1)\, t)\cos(\mathrm{Im}(r_1)\, t) & \text{si } \Delta < 0 \end{cases}$

$$y_2(t) = \begin{cases} e^{r_2 t} & \text{si } \Delta > 0 \\ t\, e^{r_1 t} & \text{si } \Delta = 0 \\ \exp(\mathrm{Re}(r_1) t)\, \sin(\mathrm{Im}(r_1) t) & \text{si } \Delta < 0 \end{cases}$$

$r_1 = r_2$ quand $\Delta = 0$

α β

$\Rightarrow r_2 = \overline{r_1}$

② Solution particulière : « Variation des constantes »

On cherche $y_p(t)$ sous la forme :

$$y_p(t) = A(t)\, y_1(t) + B(t)\, y_2(t).$$

Rmq : On a le droit de supposer

$$A'(t)\, y_1(t) + B'(t)\, y_2(t) = 0$$

car on cherche une seule solution particulière

③ Solution générale :

$$\boxed{y(t) = y_h(t) + y_p(t)} \qquad t \in \mathbb{R}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

(13 février 2024)

Exercice ① :

$$y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = t e^{2t} \cos(3t) \quad (E)$$

① Solution Homogène : Polynôme caractéristique :

$$r^2 - 4r + 3 = 0$$

$$\Delta = 16 - 4 \times 1 \times 3 = 4 > 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_1 = \dfrac{-(-4) + \sqrt{\Delta}}{2 \times 1} = 3 \\ r_2 = \dfrac{-(-4) - \sqrt{\Delta}}{2 \times 1} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_h(t) = A e^{3t} + B e^t} \qquad A, B \in \mathbb{R}$$

② Solution particulière : variation des constantes

On cherche y_p sous la forme

$$y_p(t) = A(t) e^{3t} + B(t) e^t$$

$$\Rightarrow y_p'(t) = A'(t) e^{3t} + 3A(t) e^{3t} + B'(t) e^t + B(t) e^t$$

On peut supposer $= 0$ (*)

$$\Rightarrow y_p''(t) = 3A'(t) e^{3t} + 9A(t) e^{3t} + B'(t) e^t + B(t) e^t$$

On injecte dans (E) :

$$\begin{cases} (*) \\ y_p''(t) - 4 y_p'(t) + 3 y_p(t) = t e^{2t} \cos(3t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (*) \\ 3A'(t) e^{3t} + B'(t) e^t \\ \quad + A(t) \underbrace{[9 e^{2t} - 12 e^{3t} + 3 e^{3t}]}_{=0} \\ \quad + B(t) \underbrace{[e^t - 4 e^t + 3 e^t]}_{=0} = t e^{2t} \cos(3t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (*) \quad A'(t)\, e^{3t} + B'(t)\, e^{t} = 0 \\ 3A'(t)\, e^{3t} + B'(t)\, e^{t} = t e^{2t} \cos(3t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B'(t) = -\frac{1}{2} t e^{t} \cos(3t) \\ A'(t) = \frac{1}{2} t\, e^{-t} \cos(3t) \end{cases}$$

On calcule une primitive de $B'(t)$:

$$B(t) = \int^t B'(x)\, dx = \int^t -\frac{1}{2} \underbrace{x}_{f} \underbrace{e^{x} \cos(3x)}_{g'} dx$$

Pour faire cette iPP, il nous faut $\int g'$ → on va faire une autre iPP

iPP : $\int f g' = [fg] - \int f' g$

Mémo : Pour la retrouver :

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\Rightarrow fg' = (fg)' - f'g$$

$$\Rightarrow \int fg' = [fg] - \int f'g$$

$$I = \int^t \underbrace{e^{x}}_{g'} \underbrace{\cos(3x)}_{f} dx$$

$$\overset{ipp}{=} \left[e^x \cos(3x)\right]^t - \int e^x \times (-3)\sin(3x)\,dx$$

$$= e^t \cos(3t) + 3\int^t \underbrace{e^x}_{g'} \underbrace{\sin(3x)}_{f}\,dx$$

$$\overset{ipp}{=} e^t\cos(3t) + 3\left[e^x \sin(3x)\right]^t \underbrace{- 3\int^t e^x \times 3\cos(3x)\,dx}_{=-9I}$$

$$= e^t\left(\cos(3t) + 3\sin(3t)\right) - 9I$$

$$\Leftrightarrow \quad 10I = e^t\left(\cos(3t) + 3\sin(3t)\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad I = \frac{e^t}{10}\left(\cos(3t) + 3\sin(3t)\right)$$

$$B(t) = \int^t \underbrace{-\frac{1}{2}x}_{f} \underbrace{\left(e^x \cos(3x)\right)}_{g'} dx$$

$$\overset{ipp}{=} [fg] - \int f'g$$

I d'avant

$$= \left[-\frac{1}{2}x\,\frac{e^x}{10}\left(\cos(3x) + 3\sin(3x)\right)\right]^t$$

$$- \int^t -\frac{1}{2}\cancel{x}\,\frac{e^x}{10}\left(\cos(3x) + 3\sin(3x)\right)dx$$

$$= -\frac{1}{2}t\,\frac{e^t}{10}\left(\cos(3t) + 3\sin(3t)\right)$$

$$+ \frac{1}{20} \underbrace{\int e^{x} \cos(3x)\, dx}_{\substack{= I \text{ d'avant} \\ = \frac{e^t}{10}\left(\cos(3t) + 3\sin(3t)\right)}} + \frac{}{20} \underbrace{\int e^{x} \sin(3x)\, dx}_{\substack{= \text{comme pour } I \\ = \frac{e^t}{10}\left(\sin(3t) - 3\cos(3t)\right)}}$$

$$= \frac{e^t}{20} \cos(3t) \left[-t + \frac{1}{10} - \frac{9}{10} \right]$$

$$+ \frac{e^t}{20} \sin(3t) \left[-3t + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{B(t) = \frac{e^t}{100} \cos(3t) \left[-5t - 4 \right] + \frac{e^t}{100} \sin(3t) \left[-15t + 3 \right]}$$

Des calculs similaires donnent:

$$\boxed{A(t) = \frac{e^{-t}}{100} \cos(3t) \left[4 - 5t \right] + \frac{e^{-t}}{100} \sin(3t) \left[15t + 3 \right]}$$

$$\Rightarrow y_p(t) = A(t)\, e^{3t} + B(t)\, e^{t}$$

$$= \frac{e^{2t}}{100} \Big[\cos(3t)\left(\cancel{4} - 5t\right) + \sin(3t)\left(\cancel{15t} + 3\right)$$

$$+ \cos(3t)\left(-5t - \cancel{4}\right) + \sin(3t)\left(-\cancel{15t} + 3\right) \Big]$$

$$= \frac{e^{2t}}{100} \left[-10t \cos(3t) + 6 \sin(3t) \right]$$

③ Solution générale :

$$\boxed{y(t) = A e^{3t} + B e^{t} + \frac{e^{2t}}{100}\left[-10t\cos(3t) + 6\sin(3t)\right]}$$

pour $t \in \mathbb{R}$, $A, B \in \mathbb{R}$

1er Mars 2024

$$x'' - 4x' + 3x = t e^{2t} \cdot \cos(3t)$$

eq homogène

$$r^2 - 4r + 3 = 0$$

$$\Delta = 16 - 4 \times 3 = 4$$

$$r_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2} \qquad r_1 = 1 \quad r_2 = 3$$

on a $x_h(t) = Ae^{t} + Be^{3t}$

$(A, B) \in \mathbb{R}^2$

Sol particulière

second membre de forme

$$f(t) = t e^{2t} \cdot \cos(3t)$$

Cela revient à calculer la partie réelle de $e^{(2+3i)t}$

→ polynôme de deg 1

Donc on cherche

$$x_{p_1}(t) = (\alpha + \beta t)e^{(2+3i)t} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

$$x_{p_1}'(t) = e^{(2+3i)t}\left((2+3i)(\alpha+\beta t) + \beta\right)$$

$$= e^{(2+3i)t}(2\alpha + 2\beta t + \beta + 3i\alpha + 3i\beta t)$$

$(4-9+28i)$

$(5+28i)$

$$x_{p_1}''(t) = e^{(2+3i)t}\left((2+3i)^2(\alpha+\beta t) + (2+3i)\beta + 2\beta + 3i\beta\right)$$

$$= e^{(2+3i)t}(5\alpha + 28i\cdot\alpha + 5\beta t + 28i\cdot\beta t + 2\beta + 3i\beta + 2\beta + 3i\beta)$$

on injecte

$$\cancel{e^{(2+3i)t}}\Big(5\alpha + 28i\cdot\alpha + \underline{5\beta t} + \underline{28i\beta t} + 2\beta + 3i\beta + 2\beta + 3i\beta - 8\alpha - \underline{8\beta t} - 4\beta - 12i\alpha - \underline{12i\beta t} + 3\alpha + \underline{3\beta t}\Big)$$

$$= \underline{t}\,\cancel{e^{(2+3i)t}}$$

et par identification

$$\begin{cases} \cancel{5\beta} + 28i\beta - \cancel{8\beta} - 12i\beta + \cancel{3\beta} = 1 \\ \cancel{5\alpha} + 28i\alpha + \cancel{2\beta} + 3i\beta + \cancel{2\beta} + 3i\beta - \cancel{8\alpha} - \cancel{4\beta} - 12i\alpha + \cancel{3\alpha} = 0 \end{cases}$$

$$16i\beta = 1 \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{16i}$$

$$\beta = \frac{1}{-16^2}$$

$$16i\alpha + 6i\beta = 0$$

$$\alpha = \frac{1}{16i}\left(-6\cancel{i} \times \frac{1}{16\cancel{i}}\right) = \frac{-6}{16^2 i}$$

$$\alpha = \frac{3}{1040} + \frac{3}{130} \cdot i$$

$$\beta = -\frac{1}{130} - \frac{4}{65} i$$

$$x_{p_1}(t) = (\alpha + \beta t) e^{(2+3i)t}$$

$$\alpha + \beta t = \frac{3}{1040} + \frac{3}{130} i - \frac{1}{130} t - \frac{4}{64} t \cdot i$$

$$= \left(\frac{3}{1040} - \frac{1}{130} t\right) + \left(\frac{3}{130} - \frac{4}{64} t\right) i$$

$$\mathrm{Re}(x_{p_1}(t))$$

$$= \left(\left(\quad \right) \cos(3t) - \left(\quad \right) \sin(3t) \right) \cdot e^{2t}$$

$\leftarrow$ sol particulière x_p

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

Exo 2

① $y''(t) + 4y(t) = \tan(t)$ pour $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

⊗ Sol. Homo : Équation caractéristique :

$$r^2 + 4 = 0$$

$$\Rightarrow r_{1,2} = \pm 2i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1(t) = \cos(2t) \\ y_2(t) = \sin(2t) \end{cases}$$

$\sin(-2t) = -\sin(2t)$

$$\Rightarrow y_h(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t) \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$

⊗ Solution particulière : "Variation des constantes"

...

$$\begin{cases} A'(t)\cos(2t) + B'(t)\sin(2t) = 0 \\ -2A'(t)\sin(2t) + 2B'(t)\cos(2t) = \tan(t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A'(t) = -B'(t)\dfrac{\sin(2t)}{\cos(2t)} \\ -2 \times \left[-B'(t)\dfrac{\sin(2t)}{\cos(2t)}\right] \times \sin(2t) + 2B'(t)\cos(2t) = \tan(t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow B'(t) \times \left[+2\frac{\sin^2(2t)}{\cos(2t)} + 2\cos(2t)\right] = \tan(t)$$

$$\Leftrightarrow \quad B'(t)\underbrace{\left[2\sin^2(2t)+2\cos^2(2t)\right]}_{=2\times 1=2}=\tan(t)\cos(2t)$$

$$\Leftrightarrow \quad B'(t)=\frac{1}{2}\tan(t)\cos(2t)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A'(t) = -\frac{1}{2}\tan(t)\cancel{\cos(2t)}\times\frac{\sin(2t)}{\cancel{\cos(2t)}} = -\frac{1}{2}\tan(t)\sin(2t) \\ B'(t) = \frac{1}{2}\tan(t)\cos(2t) \end{cases}$$

Rappels :
- $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1 \quad (1)$
- $\sin(2t) = 2\cos(t)\sin(t) \quad (2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A'(t) = -\frac{1}{2}\tan(t)\times 2\cos(t)\sin(t) \\ B'(t) = \frac{1}{2}\tan(t)\times\left(2\cos^2(t)-1\right) \end{cases}$$

$$\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)} \qquad \text{cotan}(t) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A'(t) = -\sin^2(t) = -1+\cos^2(t) \\ B'(t) = \sin(t)\cos(t) - \frac{1}{2}\tan(t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A'(t) \overset{(1)}{=} -1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2t) = \frac{1}{2}\left(\cos(2t)-1\right) \\ B'(t) \overset{(2)}{=} \frac{\sin(2t)}{2} - \frac{1}{2}\tan(t) \end{cases}$$

$$\Leftarrow \begin{cases} A(t) = \frac{1}{4}\sin(2t) - \frac{t}{2} \\ B(t) = -\frac{1}{4}\cos(2t) + \frac{1}{2}\ln\left(\underbrace{|\cos(t)|}_{=\cos(t)}\right) \end{cases}$$

= Cos(t) car $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Ainsi,

$$y_p(t) = \left[\cancel{\frac{1}{4}\sin(2t)} - \frac{t}{2}\right]\cos(2t) + \left[\cancel{-\frac{1}{4}\cos(2t)} + \frac{1}{2}\ln(\cos(t))\right]\sin(2t)$$

⊛ Solution générale :

$$y(t) = \left[A - \frac{t}{2}\right]\cos(2t) + \left[B + \frac{1}{2}\ln(\cos(t))\right]\sin(2t)$$

pour $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, et $A, B \in \mathbb{R}$

AUTRES SOLUTIONS :

Exo 2 : 2 • $y_h(t) = A\cos(t) + B\sin(t)$

• Variation des constantes:

$$\begin{cases} A'(t) = -\frac{\sin^2(t)}{\cos(t)} = \cos(t) - \frac{1}{\cos(t)} \\ B'(t) = \cos(t)\tan(t) = \sin(t) \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} A(t) = \sin(t) + \ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ B(t) = -\cos(t) \end{cases}$$

• <u>Ainsi</u>: $$\boxed{\begin{aligned} y(t) = {} & A\cos(t) + B\sin(t) \\ & + \cos(t) \times \ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right) \end{aligned}}$$

avec $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $A, B \in \mathbb{R}$

③ • $y_h(t) = A e^{t} + B e^{2t}$

• <u>Variation des constantes</u>: $\begin{cases} A(t) = \arctan(e^{-t}) \\ B(t) = -\frac{1}{2}\ln(1+e^{-2t}) \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} y(t) = {} & A e^{t} + B e^{2t} + e^{t}\arctan(e^{-t}) \\ & - \frac{e^{2t}}{2}\ln(1+e^{-2t}) \end{aligned}}$$

avec $t \in \mathbb{R}$, $A, B \in \mathbb{R}$

<u>Exo ③</u>:

① Poser $z(t) = y'(t)$

$\Rightarrow$ on a : $z'(t) + \frac{t^2-1}{t(t^2+1)} z(t) = 1$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow z(t) = \begin{cases} A\frac{t}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+1} & \text{pour } t \in \mathbb{R}_+^*, A \in \mathbb{R} \\ B\frac{t}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+1} & \text{pour } t \in \mathbb{R}_-^*, B \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = \begin{cases} A \dfrac{\ln(t^2+1)}{2} - \arctan(t) + C, & \text{pour } t>0 \\ B \dfrac{\ln(t^2+1)}{2} - \arctan(t) + D, & \text{pour } t<0 \end{cases}}$$

avec $A, B, C, D \in \mathbb{R}$

(2) • Injecter e^t dans (e).

• Si $y_2(t) = e^t z(t)$, alors :

$$z''(t) + \frac{2t+1}{t+1} z'(t) = 0$$

$\rightsquigarrow$ On pose $u(t) = z'(t)$, et on a :

$$u'(t) + \frac{2t+1}{t+1} u(t) = 0$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow \quad y_2(t) = -\frac{1}{2} t e^{-t} - \frac{3}{4} e^{-t}$$

Or (e) est une EDL d'ordre 2, donc, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions forme un espace affine de dimension 2

De plus (e) est homogène

$\Rightarrow$ $\mathcal{S}$ est un e.v. de dim $= 2$

$$\mathcal{S} = \{ A\, y_1(t) + B\, y_2(t) \; : \; A, B \in \mathbb{R} \}$$

car y_1 et y_2 sont indep

$\Rightarrow$ forment une base de l'espace vectoriel $\mathcal{S}$.

$$= \boxed{\left\{ Ae^{t} + B\left(-\tfrac{1}{2}t - \tfrac{3}{4}\right)e^{-t} \ : A, B \in \mathbb{R} \right\}}$$

pour $t \in]-\infty, 1[$

Exo 4 :

1. $\mathcal{Y}$ est un sous-espace affine de dimension 2 de $\mathcal{C}^{2}(]0, +\infty[, \mathbb{R})$

car EDL d'ordre 2

2. Chercher $x_2(t)$ sous la forme :

$$x_2(t) = x_1(t)\, z(t)$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow \quad x_2(t) = 1 - 2t\sin(t) + c_1 t^2 + c_2 t$$

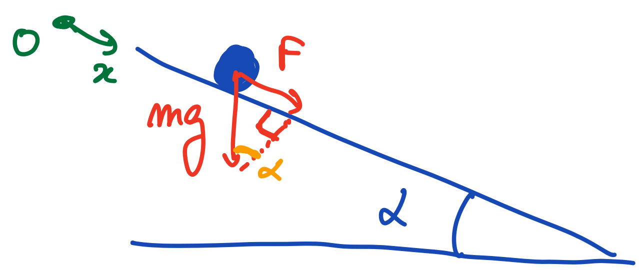
pas besoin d'un "B" car x_2 contient c_1 et c_2

$$\Rightarrow \quad \mathcal{Y} = \left\{ A\, x_1(t) + x_2(t) \ : A, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \boxed{\left\{ C t^2 + Dt - 2t\sin(t) + 1 \ : C, D \in \mathbb{R} \right\}}$$

avec $t \in]0, +\infty[$, $\quad C = c_1$, $D = A + c_2$

Exo 5 :

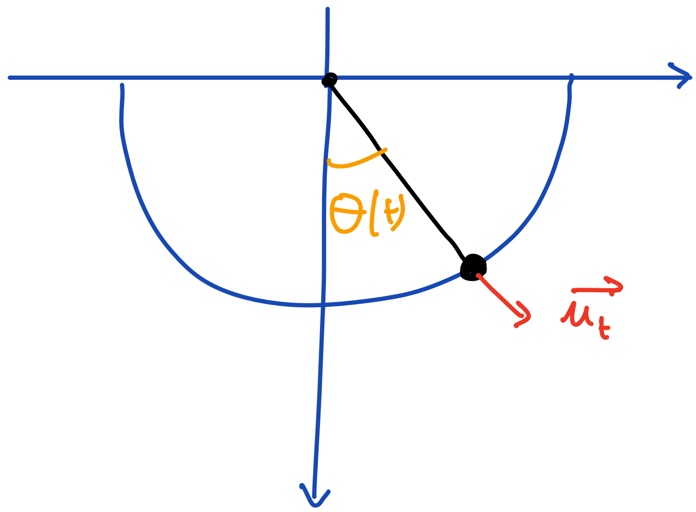


1. • Principe de Newton $\Rightarrow$ $x''(t) = g\sin(\alpha)$

• Solution : $\boxed{x(t) = At + B + \frac{1}{2} g t^2 \sin(\alpha)}$

avec $t > 0$, $A, B \in \mathbb{R}$

(2)



(a) $M(t) = r(t)\, \overrightarrow{u_r}$

$\Rightarrow \dots \Rightarrow \quad L\theta''(t) + g \sin(\theta(t)) = 0$

• Pour θ petit : dév. limité $\Rightarrow \sin(\theta) \approx \theta$

⇝ On obtient : $\boxed{L\theta''(t) + g\,\theta(t) = 0}$

(b) • $\boxed{\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\, t\right) + A \sin\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\, t\right)}$

avec $t > 0$, $A \in \mathbb{R}$

• Les oscillations ont pour période $2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

$\Rightarrow$ indep de la position initiale

$\Rightarrow$ « isochronisme »

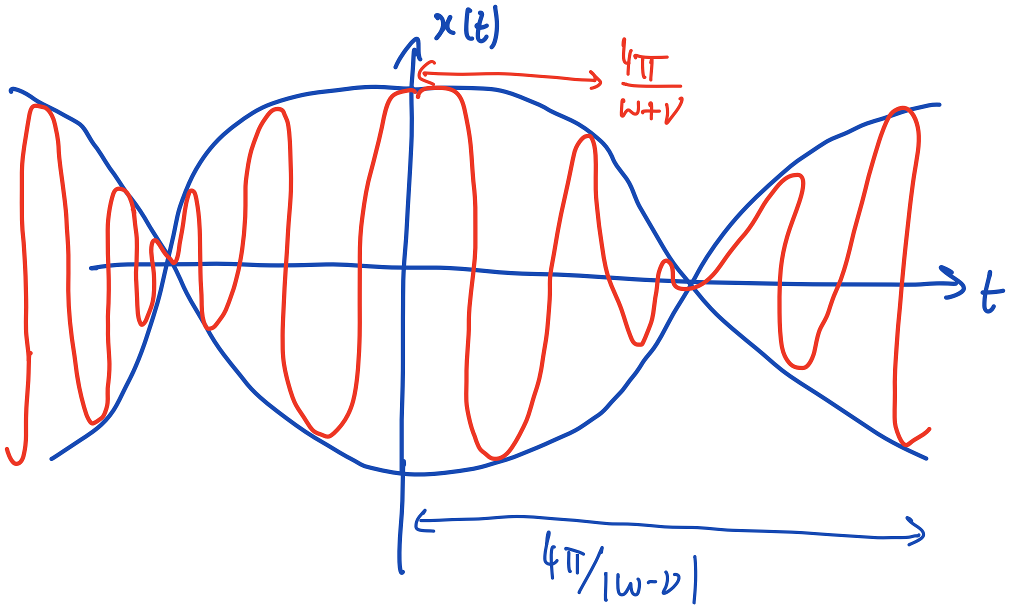
Exo 6 :

1.1 • Si $\nu \neq \omega$:

$$\boxed{x(t) = \frac{2F}{\omega^2-\nu^2}\left(\underbrace{\cos\left(\frac{\omega+\nu}{2}t\right)}_{\text{période } \frac{4\pi}{\omega+\nu}} \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{\omega-\nu}{2}t\right)}_{\text{période } \frac{4\pi}{|\omega-\nu|}}\right)}$$

$(t \in \mathbb{R})$

Phénomène de battement :



• Si $\nu = \omega$:

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) + \frac{F}{2\nu}t\sin(\nu t)}$$

avec $A, B \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$.

1.2 • $\boxed{x_p(t) = -\frac{1}{32}\cos(3t) + \frac{3}{8}t\sin(t)}$

• $\boxed{x_p(t) = -\frac{2}{3}\cos(t) + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\cos(2t)}$

avec $t \in \mathbb{R}$

$\boxed{2.1}$ (e): équation homogène

- $\underline{\text{Si } k^2 > 4w^2 :}$ $x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$
- $\underline{\text{Si } k^2 = 4w^2 :}$ $x(t) = (At + B)e^{-wt}$
- $\underline{\text{Si } 0 < k^2 < 4w^2 :}$ $x(t) = e^{-kt/2} \cdot \left[A\cos\left(\frac{\sqrt{4w^2 - k^2}}{2} t\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{4w^2 - k^2}}{2} t\right) \right]$

$A, B \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$

$\boxed{2.2}$ $\boxed{x(t) = y(t) + \frac{F}{\sqrt{\alpha}} \cos(\nu t - \Phi)}$, $t \in \mathbb{R}$.