MATHEMATIQUES - 2 IC INSA
TD 2 - EDO LINEAIRES ORDRE 2 : RAPPELS et COMPLEMENTS

Exercice 1
Intégrer l'équation différentielle :
(E) $x'' - 4x' + 3x = te^{2t}\cos(3t)$

Exercice 2
Résoudre, en utilisant la variation de la double constante :
(1) $x'' + 4x = \tan t,\ t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
(2) $x'' + x = \tan t,\ t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
(3) $x'' - 3x' + 2x = \frac{1}{1+e^{-2t}}$

Exercice 3
1. En effectuant un changement de fonction inconnue, résoudre :

$$t(t^2+1)y'' + (t^2-1)y' = 1$$

2. Soit l'équation différentielle $y'' - \frac{1}{t+1}\, y' - \frac{t}{t+1}\, y = 0$ (e) , $t \in]-\infty, -1[$.

Vérifier que $y(t) = e^t$ est solution de (e) et trouver la solution générale de (e) en posant $y(t) = e^t z(t)$.

Exercice 4
On considère, pour $t \in]0, +\infty[$, l'équation (E) : $t^2x'' - 2tx' + 2x = 2(1 + t^3 \sin t)$, et on appelle (e) l'équation sans second membre associée.
1. Quelle est la structure de l'ensemble des solutions de (E) ?
2. Vérifier que $x_1(t) = t$ est solution de (e). En déduire, par une technique d'abaissement de l'ordre, la solution générale de (E).

Exercice 5
1. Un corps de masse m se déplace sans frottement sur un plan incliné d'un angle α. Montrer que l'équation du mouvement est $x'' = g \sin\alpha$ et en déterminer la solution générale.
2. On considère un point P de masse m suspendu à un pivot par une corde de longueur L. Sur P s'exerce la force de gravitation, et il n'y a pas de frottement. On désigne par Θ l'angle que fait la corde avec la verticale.

2.1. Montrer que l'équation du mouvement s'écrit : $L\Theta'' + g\sin\Theta = 0$, que l'on approchera, pour de petites oscillations, par : $L\Theta'' + g\Theta = 0$.
2.2. Résoudre, et mettre en évidence un phénomène d'isochronisme.

Exercice 6
1. Oscillateur harmonique
Soit l'équation différentielle :

$$x'' + \omega^2 x = F\ \cos(\nu t), \quad \omega > 0;\ \nu,\ F \geq 0$$

1.1. Déterminer la solution générale de cette équation. On discutera selon les valeurs respectives des paramètres ν et ω.
1.2. Trouver *une* solution particulière de l'équation $x''+x = \cos^3 t$, puis *la* solution particulière de l'équation $x'' + x = \sin^2 t$ qui vérifie $x(0) = x'(0) = 0$.

2. Oscillateur amorti
On considère à présent l'équation :

$$(E) \quad x'' + kx' + \omega^2 x = F\ \cos(\nu t), \quad k > 0$$

2.1. Ecrire la solution générale de l'équation homogène associée (e).
2.2. Soit y une solution de (e). Prouver que toute solution de (E) est donnée par :

$$x(t) = y(t) + \frac{F}{\sqrt{\alpha}}\cos(\nu t - \Phi)$$

où $\alpha = (\omega^2 - \nu^2)^2 + k^2\nu^2,\ \ tan\Phi = \frac{k\nu}{\omega^2-\nu^2}$.