TD 3

(5 mars 2024)

Séries de fonctions

Déf : ① $\sum f_n$ CVG simplement

$\Leftrightarrow \exists$ fonction S tq $\forall x$, $\sum_{n\geq 0} f_n(x) = S(x)$

② $\sum f_n$ CVG uniformément

$\Leftrightarrow \exists$ fonction S t.q. $\lim_{N\to+\infty} \left\| \sum_{n=0}^{N} f_n - S \right\|_\infty = 0$

③ $\sum f_n$ CVG normalement

$\Leftrightarrow$ $\sum \|f_n\|_\infty$ converge

Thm : CVG norm $\Rightarrow$ CVG unif. $\Rightarrow$ CVG sp.

Intuition : La CVG uniforme "préserve" la régularité des fonctions

(ex : Si f_n est $\mathcal{C}^0$ $\forall n$, et que $\sum f_n$ CVG unif, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est $\mathcal{C}^0$)

Exo 1 :

1 **Cas où $x = 0$**

$\forall n \quad f_n(0) = 0$ donc $\sum_{n=0} f_n = 0$ donc f_n converge pour $x = 0$

Cas où $x > 0$

$f_n \sim \frac{x n}{x^2 n^3} = \frac{1}{x n^2}$

On : $f_n(x) > 0$ pour $x > 0$!!

$\Rightarrow \sum f_n$ et $\sum \frac{1}{x n^2}$ sont de même nature

et $\frac{1}{x} \sum_{n=0} \frac{1}{n^2}$ converge (Rieman)

Donc $\sum f_n$ pour $x > 0$ converge

Cas où $x < 0$

f_n est impaire $\left(f(-x) = -f(x) \right)$

donc $\boxed{\sum_{n=0} f_n \text{ converge sur } \mathbb{R}}$

Important : $\sum u_n$ CVG $\Rightarrow u_n \to 0$

Mais le contraire est faux !!!

Ex : $u_n = \frac{1}{n}$

$\sum u_n = \sum \frac{1}{n}$ = "série Harmonique" DVG par Riemann

(b) $\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+} = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} |f_n(x)|$ pour n fixé

$$f_n'(x) = \frac{n(1-n^3x^2)}{(1+n^3x^2)^2}$$

$$1-n^3x^2 > 0 \iff x^2 < \frac{1}{n^3} \iff x < \frac{1}{\sqrt{n^3}}$$

car $x \in \mathbb{R}_+$

tableau de variation

x	0		$\frac{1}{\sqrt{n^3}}$	
$n(1-n^3x^2)$		$+$	0	$-$
$(1+n^3x^2)^2$		$+$		$+$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$
$f_n(x)$		$\nearrow$	$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)$	$\searrow$

$f_n\left(\frac{1}{\ }\right) = \frac{1}{\ }$

$$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right) \quad \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

or $\sum \frac{1}{2\sqrt{n}}$ diverge selon Riemann

$\boxed{\text{Ainsi, il n'y a pas CV normale sur } \mathbb{R}_+}$

② On fixe $a>0$.

Calculer $\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = \sup_{x \geq a} |f_n(x)|$.

$\boxed{\text{Pour } n \text{ assez grand,}}$

x	0	$\frac{1}{\sqrt{n^3}}$	a	$+\infty$
f_n	↗		↘	

$\Rightarrow$ Sur $[a,+\infty[$,

$$\|f_n\|_\infty = |f_n(a)| \quad \text{pour } n > N$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = \sum_{n=0}^{N} \|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \|f_n\|_\infty$$

$$\leq \sum_{n=0}^{N} \|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+} \qquad = \sum_{n=N+1}^{+\infty} |f_n(a)|$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \left| \frac{1}{2^n} \right| \qquad < +\infty$$

par CVG simple de 1

$< +\infty$ car somme finie de réels

Donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_{\infty, [a,+\infty[} < +\infty$

$\Rightarrow \sum \|f_n\|_{\infty, [a,+\infty[}$ converge

$\Rightarrow$ $\boxed{\sum f_n \text{ CVG normalement sur } [a, +\infty[}$

(b) $\sum f_n$ cv normalement $\Rightarrow$ $\sum f_n$ cv uniformément et d'après "l'intuition":

$\forall n$; les f_n sont continues car il n'y a pas de division par 0.

alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x), \forall x \in [a, +\infty[$, est C^0, $\forall a > 0$

donc $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

les f_n sont impaires alors $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est continue sur } \mathbb{R}_*}$

③ **Thm** : (Dérivée de série)

Si : (i) f_n dérivable $\forall n$,

(ii) $\exists x_0$ tq $\sum f_n(x_0)$ CVG,

(iii) $\sum f_n'$ CVG unif,

alors $$\left(\sum_{n\geq 0} f_n(x)\right)' = \sum_{n\geq 0} f_n'(x) \quad \forall x$$

(a) $$\|f_n'\|_{\infty,[a,+\infty[} = \sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n'(x)|$$

$$= \sup_x \left| \frac{n(1-n^3x^2)}{(1+n^3x^2)^2} \right|$$

à vérifier

$$\leq \sup_x \left| \frac{n(\cancel{1+n^3x^2})}{(1+n^3x^2)^{\cancel{2}}} \right|$$

$$= \sup_x \left| \frac{n}{1+n^3x^2} \right|$$

$$\leq \sup_x \left| \frac{n}{n^3x^2} \right|$$

$$= \sup_x \left| \frac{1}{n^2x^2} \right|$$

c'est décroissant $\Rightarrow$ sup atteint en $x=a$

$$= \left|\frac{1}{n^2a^2}\right| = \frac{1}{n^2a^2}$$

$\Rightarrow \sum \|f_n'\|_\infty = \frac{1}{a^2}\sum \frac{1}{n^2}$ CVG par Riemann

$\Rightarrow \sum f_n'$ CVG normalement

(b) $\Rightarrow \sum f_n'$ CVG unif. (iii)

(i) f_n est bien dérivable $\forall n$

(ii) prendre $x_0 = a \Rightarrow \sum f_n(x_0)$ converge par la CVG simple de (i)

Par le Theorème de dérivée de série, la série S est dérivable et :

$$S'(x) = \sum_{n\geq 0} f_n'(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{n(1-n^3x^2)}{(1+n^3x^2)^2}$$

Mardi 12 Mars 2024 :

TD3 Exo 2 :

① $\mathcal{D} := \left\{ x \in \mathbb{R} : \left| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right| < +\infty \right\}$.

- Si $x \in [0 ; +\infty[$,

$$0 \leq f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+n^2} < \frac{1}{n^2}$$ CV par Riemann

- Si $x < 0$,

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

Or si le terme général de la série ne tend pas vers 0.
Donc la série ne peut pas converger

- Donc $\boxed{\mathcal{D} = [0 ; +\infty[}$

② Montrer que $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D} \setminus \{0\})$.

Rmq : • Une série est une suite, notée :

$$\sum_n f_n \qquad \text{rigoureusement } \left(\sum_{n=0}^{N} f_n\right)_N$$

- Une somme est la limite d'une série, notée :

$$\sum_{n\geq 0} f_n \quad \text{ou} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$$

rigoureusement :
$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} f_n$$

et $S(x) = \sum_{n\geq 0} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

Ex : $u_n = \frac{1}{n}$ suite, mais pas une série

alors que $\sum_n \frac{1}{n}$ est une suite et une série
$= \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n}\right)_N$

Indices : ① CVG normale $\Rightarrow$ CVG unif

② $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

③ Montrer le résultat sur $]a, +\infty[$ pour $a>0$, puis faire $a \to 0$

On utilise le Thm de Dérivée de Série :

(i) $\forall n$, $f_n \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D}\setminus\{0\})$ car on a une fraction dont le numérateur est $\mathcal{C}^1$ et le dénominateur est $\mathcal{C}^1$ et ne s'annule pas.

On va montrer le résultat sur $]a, +\infty[$

avec $a > 0$.

(ii) Pour $x_0 = a+1$ (par exemple !)
On sait par ① que $\sum f_n(x_0)$
converge simplement

(iii) Pour montrer la CVG unif.
on montre la CVG normale.
→ On veut calculer $\| f_n' \|_{\infty,]a, +\infty[}$

$$f_n'(x) = -\frac{n e^{-nx}}{1+n^2}$$

$$\| f_n' \|_\infty = \sup_{x \in]a, +\infty[} |f_n'(x)| \quad \text{car } |f_n'| \text{ est décroissante}$$

$$= |f_n'(a)|$$

$$= \frac{n e^{-na}}{1+n^2}$$

$$\leq \frac{\cancel{n} e^{-na}}{n^{\cancel{2}}} = \frac{e^{-na}}{n} \leq (e^{-a})^n$$

Or, $\sum_n (e^{-a})^n = \sum_n q^n$ avec $q = e^{-a} < 1$

qui converge vers $\dfrac{1}{1-q} = \dfrac{1}{1-e^{-a}}$

$$\Rightarrow \sum_n \|f_n'\|_\infty \leq \frac{1}{1-e^{-a}}$$

$\Rightarrow \sum_n f_n'$ CVG norm.

$\Rightarrow \sum_n f_n'$ CVG unif.

Donc, on peut appliquer le Thm, et on a $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \in \mathcal{C}^1(]a,+\infty[)$

Or, c'est vrai $\forall a>0$,

donc, $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \in \mathcal{C}^1(]0,+\infty[)}$

③ Mêmes idées, à faire seul.
sur $]0,+\infty[$

Exo 3 :

① On veut utiliser le Thm de Dérivation des Séries :

(i) $f_n(x) := x^n \dfrac{\sin(nx)}{n} \in \mathcal{C}^1(]-1,1[)$

(ii) Avec $x_0 = 0$, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$$

(iii) On montre la CVG normale :

$$\| f_n' \|_\infty = \| x^{n-1} \sin(nx) + x^n \cos(nx) \|_\infty$$

$$= \sup_{x \in]-1,1[} | x^{n-1} \sin(nx) + x^n \cos(nx) |$$

inégalité triangulaire

$$\leq \sup_{x \in]-1,1[} \left(| x^{n-1} \sin(nx) | + | x^n \cos(nx) | \right)$$

On fixe $0 < a < 1$

$$\Rightarrow \| f_n' \|_{\infty,]-a,a[} \leq \sup_{x \in]-a,a[} \left(| x^{n-1} \sin(nx) | + | x^n \cos(nx) | \right)$$

$|\cos(..)| \leq 1$
$|\sin(..)| \leq 1$

$$\leq \sup_{x \in]-a,a[} \left(| x^{n-1} | + \underbrace{| x^n |}_{\leq | x^{n-1} |} \right)$$

$$= \sup_{x \in]-a,a[} 2 | x^{n-1} |$$

$$= 2\, a^{n-1}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n'\|_\infty = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} a^{n-1}$$

on commence à 1 car c'est demandé comme ça dans l'énoncé

$$= 2 \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a^n}_{\text{somme géométrique} = \frac{1}{1-a}}$$

avec $|a|<1$

$$= \frac{2}{(1-a)}$$

$\Rightarrow \sum f_n'$ CVG normalement

$\Rightarrow \sum f_n'$ CVG unif

Donc, on peut appliquer le Thm :

$$\sum f_n(x) \in \mathcal{C}^1(]-a,a[)$$

Or, c'est vrai $\forall a \in]0,1[$

$$\Rightarrow \boxed{\sum f_n(x) \in \mathcal{C}^1(]-1,1[).}$$

SOLUTIONS :

② D'une part :
Par le Thm de Dérivée de Série,
on a aussi que :

$$\left(\sum_n f_n\right)' = \sum_n f_n'$$

$$\Rightarrow f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} \underbrace{\sin(nx)}_{=\mathrm{Im}(e^{inx})} + \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \underbrace{\cos(nx)}_{=\mathrm{Re}(e^{inx})}$$

si $x \neq 0$

$$= \frac{1}{x} \mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n e^{inx}\right) + \mathrm{Re}\left(\sum_{x=1}^{+\infty} x^n e^{inx}\right)$$

$$= \frac{1}{x} \mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} q^n\right) + \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} q^n\right)$$

avec $q = x\, e^{ix}$

$$= \frac{1}{x} \operatorname{Im}\Big(q \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} q^n}\Big) + \operatorname{Re}\Big(q \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} q^n}\Big)$$

Somme d'une série géométrique

$= \dfrac{1}{1-q}$ pour $|q|<1$

(ce qui est bien vrai $\forall x \in]-1,1[$)

$$= \frac{1}{x} \operatorname{Im}\left(\frac{q}{1-q}\right) + \operatorname{Re}\left(\frac{q}{1-q}\right)$$

$$= \frac{1}{x} \operatorname{Im}\left(\frac{x\cos(x) + ix\sin(x)}{1 - x\cos(x) - ix\sin(x)}\right) + \operatorname{Re}(\,\text{"}\,)$$

Complexe conjugué

$$= \frac{1}{x} \operatorname{Im}\left(\frac{[x\cos(x) + ix\sin(x)][1 - x\cos(x) + ix\sin(x)]}{(1 - x\cos(x))^2 + (x\sin(x))^2}\right)$$

$$+ \operatorname{Re}(\,\text{"}\,)$$

$$= \frac{1}{x} \operatorname{Im}\left(\frac{x\cos(x) - x^2\cos^2(x) + ix^2\cos(x)\sin(x) + ix\sin(x) - ix^2\sin(x)\cos(x) - x^2\sin^2(x)}{1 - 2x\cos(x) + x^2\cos^2(x) + x^2\sin^2(x)}\right)$$

$$+ \operatorname{Re}(\,\text{"}\,)$$

$$= \frac{1}{x} \mathrm{Im}\left(\frac{x\cos(x) - x^2 + ix\sin(x)}{1 - 2x\cos(x) + x^2} \right)$$

$$+ \mathrm{Re}\left(\frac{x\cos(x) - x^2 + ix\sin(x)}{1 - 2x\cos(x) + x^2} \right)$$

$$= \frac{\sin(x)}{1-2x\cos(x)+x^2} + \frac{x\cos(x) - x^2}{1-2x\cos(x)+x^2}$$

$$= \frac{\sin(x) + x\cos(x) - x^2}{1-2x\cos(x)+x^2}$$

En $x=0$: $\qquad f'(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 0$

D'autre part : en utilisant la formule

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Arctan}(t) = \frac{1}{1+t^2},$$

on trouve que

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Arctan}\left(\frac{x\sin x}{1-x\cos x}\right) = \frac{\sin x + x\cos x - x^2}{1+x^2-2x\cos x}$$

$$= f'(x)$$

$\Rightarrow$ En intégrant :

$$f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x+\sin(x)}{1-x\cos(x)}\right) + C$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

On, $f(0) = 0 \Rightarrow C = 0$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x+\sin(x)}{1-x\cos(x)}\right)}$$

Exo 4 :

1 Rmq : ζ est la fonction "zeta de Riemann"

- ζ est bien def car la série $\sum_n \frac{1}{n^x}$ CVG simplement sur $]1, +\infty[$.

- Il faut montrer que :
  (i) $\exists x_0$ tq $\sum f_n(x_0)$ CVG simpl.
  (ii) $\forall n$, $f_n \in \mathcal{C}^\infty(]1, +\infty[)$

(iii) $\forall k, \forall n$, $\sum_n f_n^{(k)}$ CVG unif

$\Rightarrow$ Par le Thm de Dérivée Généralisée d'une série, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \in \mathcal{C}^k(]1,+\infty[)$ $\forall k$

i.e. $$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \in \mathcal{C}^\infty(]1,+\infty[)}$$

(2) • Montrer que $\zeta'(x) < 0$

$\Rightarrow$ $\zeta(x)$ est décroissante sur $]1,+\infty[$

• Résonner par l'absurde: Supposer que ζ est bornée au voisinnage de 1 et trouver une contradiction

$\Rightarrow$ $$\boxed{\lim_{x\to 1^+} \zeta(x) = +\infty}$$

(3) Thm : (Double limite) Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Si (i) $\sum f_n$ CVG unif

(ii) $\lim_{x\to x_0} f_n(x)$ existe

alors :
$$\lim_{x\to x_0} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x_0)$$

Vérifier (i) et (ii) pour $x_0 = +\infty$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n^x}}_{= \lim_{x\to+\infty} \exp(-x\ln(n)) = \begin{cases} 1 & \text{si } n=1 \\ 0 & \text{si } n\geq 2 \end{cases}}$$

$$= 1$$

2 **Thm : (Intégrale d'une série)**

Si (i) $\sum_n f_n$ CVG simpl,

(ii) $\int f_n(x)dx$ existe $\forall n$,

(iii) la série $\sum_n \int |f_n(x)| dx$ CVG simpl.

Alors $$\int \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int f_n(x)\,dx$$

Vérifier (i), (ii), (iii)

$$\Rightarrow \int_2^{+\infty} \zeta(x) - 1\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int \frac{1}{n^x}\,dx - x$$

$$= \boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \ln(n)}}$$