TD 4

Séries Entières & EDO

Rappels:

- Les <u>séries entières</u> sont un cas particulier de série de fonction, de la forme :

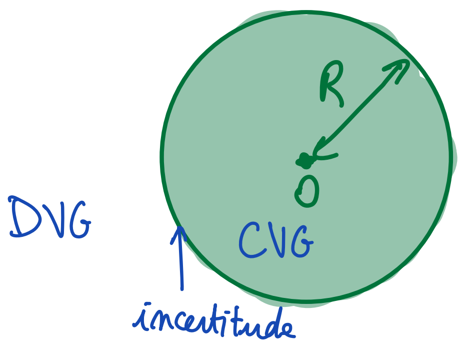
$$\sum_n a_n z^n \quad \text{avec } z \in \mathbb{C},\ a_n \in \mathbb{C} \qquad \left(\text{ou } \sum_n a_n x^n \quad \text{avec } x \in \mathbb{R},\ a_n \in \mathbb{R}\right)$$

- Elles sont intéressantes car :

① En $z=0$, on a toujours convergence.

② elles ont un rayon de convergence :

$$R := \sup \left\{ r \geq 0 \;\middle|\; \sum_n a_n r^n \text{ converge} \right\}$$



→ Disque de convergence de la série " $D(0, R)$ "

③ [Thm : la série entière $\sum_n a_n z^n$ converge <u>normalement</u> sur tout ensemble $K \subseteq D(0,R)$ fermé et borné.

④ La série entière DVG en dehors de $D(0,R)$

- Grâce au Thm, on peut toujours appliquer « l'intuition » du TD 3 : on peut dériver facilement, on peut intégrer facilement, etc...

Exo 1 :

1. Indice : "Série géométrique"

$\sum_n q^n$ converge vers $\frac{1}{1-q}$ ssi $|q|<1$

$$R = \sup\{r \geq 0, \sum a_n r^n \text{ CV}\}$$

$$u_n^{(z)} = \frac{(-1)^n z^{2n}}{2^n} = \left(\frac{(-1) z^2}{2}\right)^n = q^n$$

donc CV ssi $|z|^2 < 2$ ssi $|q|<1$

$|z| < \sqrt{2}$

Donc $R = \sqrt{2}$ et $D = D(0, \sqrt{2})$

Question : Quelle est l'expression de a_n ?

$$a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^k}{2^k} & \text{si } n = 2k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_n a_n z^n = \sum_k \frac{(-1)^k}{2^k} z^{2k}$$

Rmk : c'est possible aussi avec la Règle de d'Alembert.

② Grâce à l'indice, on obtient :

$\forall x \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n \quad \text{avec} \quad q = \frac{-x^2}{2}$$

$$= \frac{1}{1-q}$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{-x^2}{2}} = \boxed{\frac{2}{2+x^2}}$$

c'est la somme de la série

③ $$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n}$$

On a convergence normale à l'intérieur du disque, donc on peut dériver terme-à-terme :

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \, 2n \, x^{2n-1}}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n x^{2n-1}}{2^{n-1}}$$

Car en $n=0$, la dérivée $=0$

On évalue en $x = 1 \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$:

$$S'(1) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{2^n} \right) \times 2$$

D'autre part on avait calculé $S(x) = \frac{2}{2+x^2}$,

Donc :

$$S'(1) = -\frac{4}{9}$$

Ainsi : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{2^n} = -\frac{4}{9} \times \frac{1}{2} = \boxed{-\frac{2}{9}}$

Exo 2 :

① Utiliser le critère de d'Alembert :

- calculer $\left| \dfrac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$
- Si $\ell < 1$, alors $\sum u_n(z)$ CVG
- Si $\ell > 1$, alors $\sum u_n(z)$ DVG
- Si $\ell = 1$: incertitude

On a : $u_n(x) = \dfrac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{n(2n+1)} \neq 0$ pour $x \neq 0$

$\Rightarrow \left| \dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} x^2 = \ell$

$\Rightarrow$ la série CVG si $\ell < 1$

i.e. $x^2 < 1$

i.e. $x \in]-1, 1[$

et elle diverge pour $|x| > 1$

Donc $\boxed{R = 1}$

② $\ln(1+X) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{X^n}{n}$

$\Rightarrow \ln(1+x^2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$

n

On a convergence normale à l'intérieur de $]-1,1[$, donc on peut intégrer terme-à-terme:

$$\int^{u} \ln(1+x^2)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int^{u} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n}\,dx$$

$\Rightarrow$ calculs ...

$\Rightarrow$ $x\ln(1+x^2) - 2x + 2\operatorname{Arctan}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, x^{2n+1}}{n(2n+1)} = S(x)$

③ $\|u_n(z)\|_{\infty,[-1,1]} = \frac{1}{n(2n+1)}$

$\Rightarrow$ $\sum_n \|u_n(z)\|_\infty = \sum_n \frac{1}{n(2n+1)}$ CVG par Riemann

$\Rightarrow$ CVG normale sur $[-1,1]$.

$\Rightarrow$ $S(x)$ est continue sur $[-1,1]$

$\Rightarrow$ $S(1) = \lim_{x\to 1} S(x) = \lim_{x\to 1}\left(x\ln(1+x^2) - 2x + 2\operatorname{Arctan} x\right)$

$$= \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}$$

D'où $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}$.

Exo 4 :

25 mars 2024

1) Poser $y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ sur $]-R, R[$ avec $R>0$.

$$\Rightarrow y''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\, a_n\, t^{n-2}$$

pour $n \in \{0,1\}$, on a : $(a_0 + a_1 t)'' = 0$

Changement de var. $k = n-2$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (k+2)(k+1)\, a_{k+2}\, t^k$$

Donc :

EDO de l'énoncé

$$y''(t) - y(t) = 0 = \sum_{k=0}^{+\infty} \boxed{0} \cdot t^k$$

série entière

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (k+2)(k+1)\, a_{k+2}\, t^k - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \boxed{\left[(k+2)(k+1)\, a_{k+2} - a_k\right]} t^k$$

Par "identification des coefficients" :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad 0 = (k+2)(k+1)\, a_{k+2} - a_k$$

→ Trouvons a_k en fonct de a_0 et a_1.

$$a_{k+2} = \frac{a_k}{(k+2)(k+1)}$$

Ex : $k = 4$

$$a_6 = \frac{a_4}{(4+2)(4+1)} = \frac{1}{(4+2)(4+1)} \times \frac{a_2}{(2+2)(2+1)} = \frac{1}{(4+2)(4+1)} \times \frac{1}{(2+2)(2+1)} \times \frac{a_0}{(0+2)(0+1)}$$

$$= \frac{1}{6\times5\times4\times3\times2\times1} a_0$$

$$= \frac{1}{6!} a_0 = \frac{1}{(k+2)!} a_0$$

Pour $k = 2m$ pair, $a_{k+2} = \frac{1}{(k+2)!} a_0$ (par récurrence)

cad : $a_k = \frac{1}{k!} a_0$

cad : $a_{2m} = \frac{1}{(2m)!} a_0$

Ex : $k = 5$

$$a_7 = \dots = \frac{1}{7!} a_1$$

De même, par récurrence, pour $k = 2m+1$ impair :

$$a_k = \frac{1}{k!} a_1, \quad \text{cad : } a_{2m+1} = \frac{1}{(2m+1)!} a_1$$

Donc les solutions à l'équation différentielles sont de la forme :

$$\boxed{y(t) = a_0 \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{t^{2m}}{(2m)!} + a_1 \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{t^{2m+1}}{(2m+1)!}}$$

Rmq : On retrouve le développement en série entière de fonctions usuelles :

$$y(t) = a_0 \cosh(t) + a_1 \sinh(t)$$

2 Même idée :

On pose $y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k$

$$\Rightarrow \omega^2 t\, y(t) = \omega^2 t \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \omega^2 a_k t^{k+1}$$

et : $$2 y'(t) = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} k\, a_k t^{k-1}$$

Changement de variable

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} 2(k+1) a_{k+1} t^k$$

et : $$t\, y''(t) = t \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) a_k t^{k-2}$$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) a_k t^{k-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} t^{k+1}$$

Donc :

$$0 \overset{\text{EDO}}{=} t\, y''(t) + 2 y'(t) + \omega^2 t\, y(t)$$

séries entières

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} t^{k+1}$$

$$+\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} 2(k+1)\,a_{k+1}\,t^k} \to \overset{\text{on veut } t^{k+1}}{=} 2a_1 + \sum_{k=0}^{+\infty} 2(k+2)a_{k+2}\,t^{k+1}$$

$$+\sum_{k=0}^{+\infty} \omega^2 a_k\, t^{k+1}$$

$$= 2a_1 + \sum_{k=0}^{+\infty}\Big[(k+2)(k+1)a_{k+2} + 2(k+2)a_{k+2} + \omega^2 a_k\Big]\,t^{k+1}$$

Donc, par identification des coefficients :

$$\begin{cases} 0 = 2a_1 \\ 0 = (k+2)(k+1)a_{k+2} + 2(k+2)a_{k+2} + \omega^2 a_k \end{cases}$$

$$= (k+2)(k+1+2)\,a_{k+2} + \omega^2 a_k$$

$$= (k+2)(k+3)\,a_{k+2} + \omega^2 a_k$$

cad :
$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{k+2} = \dfrac{-\omega^2 a_k}{(k+2)(k+3)} \end{cases} \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Par récurrence : (à faire)

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{(-1)^n\,\omega^{2n}}{(2n+1)!}\,a_0 & \text{si } k = 2n \\ 0 & \text{si } k = 2n+1 \end{cases}$$

Donc
$$y(t) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,\omega^{2n}}{(2n+1)!}\, t^{2n}$$

on veut t^{2n+1} pour retrouver un développement usuel

$$= \frac{a_0}{t}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,\omega^{2n}}{(2n+1)!}\, t^{2n+1}$$

$$= \boxed{\frac{a_0}{t} \sin(\omega t)}$$

<u>Commentaire :</u> L'équation différentielle est homogène et de degré 2, donc l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimention 2.

$\Rightarrow$ il reste une solution homogène indépendente à trouver pour obtenir une base de l'ensemble des solutions.

$\rightarrow$ En étant malin, on peut penser que $\frac{1}{t}\cos(\omega t)$ est aussi solution, il suffit de vérifier que c'est bien le cas.

③

$$\boxed{\begin{array}{c}(t^2+t)\,y''(t) + (3t+1)\,y'(t) + y(t) = 0 \\ \text{avec } t \in\,]0, +\infty[\end{array}}$$

On suppose que $y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$.

- $(3t+1)\,y'(t) = 3t \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, t^{n-1}$

$$+ 1 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, t^{n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} 3n\, a_n\, t^n$$

$$+\sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, t^{n-1}$$

chang. de var.

$k = n-1$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} 3(k+1)\, a_{k+1}\, t^{k+1}$$

$$+\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)\, a_{k+1}\, t^{k}$$

$$= (*)$$

- $$(t^2+t)\, y''(t) = t^2 \cdot \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\, a_n\, t^{n-2}$$

$$+\, t \cdot \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\, a_n\, t^{n-2}$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\, a_n\, t^{n}$$

$$+\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\, a_n\, t^{n-1}$$

$k = n-2$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (k+2)(k+1)\, a_{k+2}\, \boxed{t^{k+2}}$$

$$+\sum_{k=0}^{+\infty} (k+2)(k+1)\, a_{k+2}\, \boxed{t^{k+1}}$$

on veut aussi t^{k+2}

$$\underbrace{\overset{(k=0)}{(2\times 1)a_2 t}}_{} + \underbrace{\overset{(k\geq 1)}{\sum_{k=1}^{+\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2}t^{k+1}}}_{\ell = k-1}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{+\infty} (\ell+3)(\ell+2)a_{\ell+3}t^{\ell+2}$$

$$= 2a_2 t + \sum_{k=0}^{+\infty} \Big[(k+2)(k+1)a_{k+2} + (k+3)(k+2)a_{k+3} \Big] t^{k+2}$$

$$(*) = 3\times(0+1)\,a_1 t + \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} 3(k+1)a_{k+1}t^{k+1}}_{\ell = k-1}$$

$$+ 1\cdot a_1 + 2a_2 t + \underbrace{\sum_{k=2}^{+\infty} (k+1)\,a_{k+1}\,t^{k}}_{m = k-2}$$

$$= 3a_1 t + \sum_{\ell=0}^{+\infty} 3(\ell+2)\,a_{\ell+2}\,t^{\ell+2}$$

$$+ a_1 + 2a_2 t + \sum_{m=0}^{+\infty} (m+3)\,a_{m+3}\,t^{m+2}$$

• $y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \boxed{t^n}$ on veut aussi t^{k+2}

$k = n-2$

$$= a_0 + a_1 t + \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k+2}\,t^{k+2}$$

On regroupe :

$$(t^2+t)\, y''(t) + (3t+1)\, y(t) + y(t)$$

$$= 2a_2 t + \sum_{k=0}^{+\infty} \left[(k+2)(k+1)\, a_{k+2} + (k+3)(k+2)\, a_{k+3} \right] t^{k+2}$$

$$+ 3a_1 t + \sum_{k=0}^{+\infty} 3(k+2)\, a_{k+2}\, t^{k+2}$$

$$+ a_1 + 2a_2 t + \sum_{k=0}^{+\infty} (k+3)\, a_{k+3}\, t^{k+2}$$

$$+ a_0 + a_1 t + \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k+2}\, t^{k+2}$$

$$= (a_0 + a_1) + \underbrace{(2a_2 + 3a_1 + 2a_2 + a_1)\, t}_{= 4(a_1 + a_2)}$$

$$+ \sum_{k=0}^{+\infty} \Bigg(\Big[\underbrace{(k+2)(k+1) + 3(k+2) + 1}_{= k^2 + 6k + 9 \,=\, (k+3)^2} \Big] a_{k+2}$$

$$+ \Big[\underbrace{(k+3)(k+2) + (k+3)}_{= (k+3)(k+2+1) \,=\, (k+3)^2} \Big] a_{k+3} \Bigg) t^{k+2}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} 0\, t^k$$

Par identification des coeff :

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 = 0 \\ 4(a_1 + a_2) = 0 \\ \forall k \geq 0, \quad (k+3)^2 (a_{k+2} + a_{k+3}) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \forall n, \quad a_{n+1} = -a_n$$

récurrence

$$\Rightarrow \quad a_n = (-1)^n a_0$$

Ainsi

$$\boxed{y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_0 t^n = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} (-t)^n = \frac{a_0}{1+t}}$$

pour $t < 1$

Série géométrique :

$$\sum q^n = \frac{1}{1-q}$$

pour $|q| < 1$

On vérifie que cette solution est valable sur $]0, +\infty[$.

- Pour trouver une autre solution, on la cherche sous la forme :

$$y(t) = \frac{a_0}{1+t} \times z(t)$$ ← Technique typique

solution d'avant

⇒ l'équation diff devient :

$$t\, z''(t) + z'(t) = 0$$

On fait l'"abaissement de l'ordre" :
on fait le changement de variable $u(t) = z'(t)$ et on obtient :

$$t\, u'(t) + u(t) = 0$$

(On a abaissé l'ordre de l'EDO de 2 à 1)

→ On sait résoudre : $u(t) = \frac{c_1}{t}$

$$\Rightarrow z'(t) = \frac{c_1}{t} \quad \Rightarrow \quad z(t) = c_1 \ln(t) + c_2$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{a_0}{1+t}\, z(t) = \frac{a_0 c_1 \ln(t) + a_0 c_2}{1+t}$$

$$= K_1 \frac{\ln(t)}{1+t} + K_2 \frac{1}{1+t}$$

Donc une base de solutions est donnée par :

$$\boxed{\left\{ \frac{\ln(t)}{1+t} , \frac{1}{1+t} \right\}}.$$

Exo 3 :

① • $f(x) = \underbrace{e^{x^2/2}}\int_0^x \underbrace{e^{-t^2/2}} dt$

développables en série entière (c'est le Dev. Limité !)

et l'intégrale d'une série entière est aussi une série entière (car on a CVG normale) :

$$\int \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int a_n t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n} t^{n+1}$$

Donc f est développable en série entière.

$$\bullet \quad f'(x) = \underbrace{x\, e^{x^2/2} \int_0^x e^{-t^2/2}\, dt}_{= f(x)} + e^{x^2/2} e^{-x^2/2}$$

$$= x\, f(x) + 1$$

Donc $f(x)$ est solution de l'EDO:

$$\boxed{y'(t) = t\, y(t) + 1}$$

<u>c.a.d.:</u> $\boxed{y'(t) - t\, y(t) - 1 = 0}$

② On cherche y sous la forme:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$

On a:

$$\bullet \quad y'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n t^{n-1}$$

$$\overset{k=n-1}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)\, a_{k+1}\, t^k$$

- $-t\,y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} -a_n t^{n+1}$

On regroupe :

$$0 = y'(t) - t\,y(t) - 1$$

on veut t^{k+1}

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) a_{k+1} \boxed{t^k}} + \sum_{k=0}^{+\infty} -a_k t^{k+1} - 1$$

$$= 1 \cdot a_1 + \sum_{k=0}^{+\infty} (k+2) a_{k+2} t^{k+1}$$

$$= a_1 + \sum_{k=0}^{+\infty} \left[(k+2) a_{k+2} - a_k \right] t^{k+1} - 1$$

Donc par identification des coefficients :

$$\begin{cases} a_1 - 1 = 0 \\ \forall k \geq 0, \quad (k+2) a_{k+2} - a_k = 0 \end{cases}$$

$a_0 = f(0) = 0$ — récurrence

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{2n} = 0 \\ a_{2n+1} = \dots = \dfrac{2^n\, n!}{(2n+1)!} \end{cases}$$

Ainsi : $\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}}$

AUTRES SOLUTIONS :

Exo 5 :

(1) Poser $x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ et injecter dans l'EDO

$\to$ On fait l'identification des coefficients :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ 2a_1 - 2a_1 = 0 \\ \forall n \geq 0, \quad n(n+1)\, a_{n+2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 \text{ et } a_2 \text{ quelconques} \\ \forall k \geq 3, \quad a_k = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x(t) = a_1 t + a_2 t^2$

fonctions linéairement indépendantes

Or, les solutions d'une EDO homogène d'ordre 2 forment un e.v. de dim $= 2$

$\Rightarrow$ une base est $\boxed{\{t, t^2\}}$.

② On a la solution homogène, il reste à trouver 1 solution particulière $\rightarrow$ "variation de la double constante" :

$$y_p(t) = A(t) \cdot t + B(t) \cdot t^2$$

$\Rightarrow$ ...

$$\Rightarrow \quad y_p(t) = 1 - 2t \sin(t)$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = A t + B t^2 + (1 - 2t \sin(t))}.$$