MATHEMATIQUES - 2 IC INSA
TD 4 - SERIES ENTIERES et APPLICATIONS aux EDO

Exercice 1

Soit la série entière de terme général : $u_n(z) = \frac{(-1)^n z^{2n}}{2^n}, \ z \in \mathbb{C}$.

1. Trouver son rayon de convergence R et son domaine de convergence $\mathcal{D}$.
2. Calculer la somme $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ sur le domaine réel $]-R, R[$.
3. En déduire la valeur de la somme : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ n}{2^n}$.

Exercice 2

On considère la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1} \ x^{2n+1}}{n(2n+1)}$. On note S sa somme.

1. Trouver son rayon de convergence R.
2. Ecrire le développement en série entière de $\ln(1+x^2)$, puis exprimer $S(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.
3. Montrer que la série converge normalement sur $[-R, R]$, en déduire la valeur de :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}$$

Exercice 3

On considère la fonction f :

$$x \mapsto f(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}} \ dt$$

1. Justifier que f est développable en série entière, et trouver une équation différentielle linéaire d'ordre 1 (E) dont f est solution.
2. En déduire l'expression $\sum a_n x^n$ du développement en série entière de f. On écrira les coefficients a_n à l'aide de factorielles.

Exercice 4

1. Utiliser les séries entières pour résoudre $y'' - y = 0$ ... et retrouver un résultat connu !
2. Déterminer les solutions de $ty'' + 2y' + \omega^2 ty = 0, \quad t \in]0, +\infty[$ qui sont développables en série entière. Commentaire ?
3. Soit l'équation $(t^2 + t)y'' + (3t + 1)y' + y = 0, \quad t \in]0, +\infty[$.
Déterminer une solution en utilisant les séries entières.
Déterminer une base de solutions par abaissement de l'ordre.

Exercice 5

On reprend l'équation différentielle (cf. TD 2 - Exercice 4) :

$$(E)\ t^2x'' - 2tx' + 2x = 2(1 + t^3 \sin t), \quad t \in]0, +\infty[$$

1. Déterminer une base de solutions de l'équation homogène (e) associée, en utilisant des séries entières.

2. Retrouver la solution générale de (E) par la technique de la variation de la double constante.