TD 5

Rappels :

Méthode 1 : ① Écrire le système d'EDO sous forme matricielle :

$$\underset{\text{Vecteur}}{X'(t)} = \underset{\text{matrice}}{A}\ \underset{\text{vecteur}}{X(t)} \qquad (*)$$

② Si c'est possible, on diagonalise A :

$$A = P \underset{\text{mat diagonale}}{D} \underset{\text{mat. inversible}}{P^{-1}}$$

③ **Astuce :** $(*) \Rightarrow X'(t) = PDP^{-1}X(t)$

$$\Rightarrow P^{-1}X'(t) = D\,P^{-1}X(t)$$

On fait un changement de variable $Z(t) = P^{-1}X(t)$, et on a :

$$Z'(t) = D\,Z(t)$$

cad : $\quad z_i'(t) = d_i\, z_i(t)$

↳ on résout facilement

coefficients du vecteur $Z(t)$

coefficients de D

④ On retrouve $X(t)$:

$$X(t) = P\, Z(t)$$

Rmq : Si $X(t) = k_1 X_1(t) + k_2 X_2(t)$ (avec $X_1, X_2 \in \mathbb{C}^2$) on peut passer à $\mathbb{R}^2$ en prenant $\mathrm{Re}(X_1)$, $\mathrm{Im}(X_2)$:

$$X(t) = k_1 \mathrm{Re}(X_1(t)) + k_2 \mathrm{Im}(X_2(t)) \in \mathbb{R}^2$$

(voir Exo ①. 2)

Rappel : Pour vérifier si A est diagonalisable, on calcule le polynôme caractéristique :

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

→ on trouve les valeurs propres et leur multiplicité

→ A est diagonalisable ssi chaque v.p admet un espace propre $\ker(A - \lambda I_n)$ de même dimension que la multiplicité.

Ex : $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

Méthode 2 : Si l'on ne peut pas diagonaliser A, soit on essaie de la trianguler et on fait comme Méthode 1, soit on fait la " technique des espaces caractéristiques : (Voir Exo 2 & 3) :

→ Par exemple, si A admet un vp double λ mais un seul $\vec{vp}$ associé, V_1 alors on cherche V_2 tel que $\{V_1, V_2\}$ forme une base de

$$\ker\left((A - \lambda I_n)^2\right)$$

⇒ Les solution à $(*)$ sont de la forme :

$$\boxed{\begin{aligned} X(t) = {} & k_1 e^{\lambda t}\left[I_n + t(A - \lambda I_n)\right]V_1 \\ & + k_2 e^{\lambda t}\left[I_n + t(A - \lambda I_n)\right]V_2, \end{aligned}}$$

avec $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

Exercice 1 :

1) $X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 5 \\ -6 & 4 & 10 \\ 3 & -2 & -5 \end{bmatrix}$

Polynôme caractéristique :

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 & 5 \\ -6 & 4-\lambda & 10 \\ 3 & -2 & -5-\lambda \end{vmatrix}$$

Développement selon la 1ère ligne.

$$= (-3-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 10 \\ -2 & -5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$!!\ - 2 \begin{vmatrix} -6 & 10 \\ 3 & -5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$+ 5 \begin{vmatrix} -6 & 4-\lambda \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (-3-\lambda)\left[(4-\lambda)(-5-\lambda) - (-2)\times 10\right]$$
$$- 2\left[-6\times(-5-\lambda) - 3\times 10\right]$$
$$+ 5\left[-6\times(-2) - 3(4-\lambda)\right]$$

$$= \dots = \boxed{-\lambda^2(\lambda+4)}$$

Donc, les valeurs propres sont:

- 0, de multiplicité 2
- −4, de multiplicité 1

Trouvons les vecteurs propres:

- <u>Pour $\lambda=0$</u> : Résoudre $A\underbrace{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}}_{=v} = \underset{\lambda}{0}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$

$=V$

$$\begin{cases} -3x+2y+5z=0 \\ -6x+4y+10z=0 \\ 3x-2y-5z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{3}(-2y-5z) \\ \left.\begin{array}{l} 0=0 \\ 0=0 \end{array}\right\} \text{car } \begin{array}{l} L_2=2L_1 \\ L_3=-L_1 \end{array} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x=(2k_1+5k_2) \\ y=k_1 \\ z=k_2 \end{cases}$$

on met le " $\frac{1}{3}$ " dans les constantes

$$\Rightarrow V=k_1\underbrace{\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}}_{=V_1}+k_2\underbrace{\begin{bmatrix}5\\0\\1\end{bmatrix}}_{=V_2}$$

$\lambda=0$ admet 2 $\vec{vp}$: $V_1=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$ et $V_2=\begin{bmatrix}5\\0\\1\end{bmatrix}$

⊗ Pour $\lambda=-4$: On résout $AV=-4V$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x+2y+5z=-4x \\ -6x+4y+10z=-4y \\ 3x-2y-5z=-4z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow V=k_3\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$$

$= V_3$

Ainsi :
$$D = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & -4 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

- Changement de variable :
$$Z(t) = P^{-1} X(t)$$
(pas besoin de calculer P^{-1} !!)

On a :
$$Z'(t) = D \; Z(t)$$

cad
$$\begin{bmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \\ z_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{bmatrix}$$

cad
$$\begin{cases} z_1'(t) = 0 \, z_1(t) = 0 \\ z_2'(t) = 0 \, z_2(t) = 0 \\ z_3'(t) = -4 z_3(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1(t) = c_1 \\ z_2(t) = c_2 \\ z_3(t) = c_3 e^{-4t} \end{cases}$$

Puis on retrouve $X(t)$:

$$X(t) = P \, Z(t)$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 e^{-4t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2c_1 + 5c_2 + c_3 e^{-4t} \\ 3c_1 + 2c_3 e^{-4t} \\ 3c_2 - c_3 e^{-4t} \end{bmatrix}$$

D'où :

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = 2c_1 + 5c_2 + c_3 e^{-4t} \\ y(t) = 3c_1 + 2c_3 e^{-4t} \\ z(t) = 3c_2 - c_3 e^{-4t} \end{cases} \quad \text{avec } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}}$$

② $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Polynôme caractéristique :

$$\chi_A(\lambda) = \dots = (\lambda - 1 - i)(\lambda - 1 + i)$$

$\Rightarrow$ Deux valeurs propres :

- $\lambda_1 = 1 + i$, de multiplicité 1
- $\lambda_2 = 1 - i$, de multiplicité 1

Vecteurs propres :

- Pour $\lambda_1 = 1+i$, on résout $A \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{= v_1} = \underbrace{(1+i)}_{= \lambda_1} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{= v_1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2y = (1+i)x \\ x + 2y = (1+i)y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1+i}{2} x \\ x - (1+i)x = (1+i) \times \left(-\frac{1+i}{2} x\right) \end{cases}$$

factoriser par x

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1+i}{2} x \\ \underbrace{\left[\cancel{1} - \cancel{1} - i - (1+i)\left(-\frac{1+i}{2}\right)\right]}_{= -i + \frac{1}{2}(\cancel{1} + 2i - \cancel{1})} x = 0 \end{cases}$$

$= 0$

$\Longleftrightarrow \quad y = -\frac{1+i}{2} x$

$\rightsquigarrow$ prendre $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1+i}{2} \end{bmatrix}$

ou bien $\boxed{\begin{bmatrix} 2 \\ -1-i \end{bmatrix}}$

<u>Pour $\lambda_2 = 1-i$:</u>

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (1-i) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -2y = (1-i)x \\ x + 2y = (1-i)y \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1-i}{2} x \\ x + 2\left(-\frac{1-i}{2}\right)x = (1-i) \times \left(-\frac{1-i}{2}\right)x \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1-i}{2} x \\ \left[\cancel{1} - \cancel{1} + i - (1-i) \times \left(-\frac{1-i}{2}\right)\right] x = 0 \end{cases}$$

$$= i + \frac{1}{2}(\cancel{1} - 2i - \cancel{1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad y = -\frac{1-i}{2}\, x$$

x ← k

→ On peut prendre

$$V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1-i}{2} \end{bmatrix} \quad \text{ou bien} \quad \boxed{\begin{bmatrix} -2 \\ 1-i \end{bmatrix}}$$

1 ← k, $\quad -\frac{1-i}{2}$ ← $y = -\frac{1-i}{2}k$

On a :

$$A = P D P^{-1},$$

avec $D = \begin{bmatrix} 1+i & \\ & 1-i \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} V_1 \mid V_2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1-i & 1-i \end{bmatrix}$$

On fait un changement de variable :

$$Z(t) = P^{-1} X(t)$$

$\Rightarrow$ on a : $\quad Z'(t) = D\, Z(t)$

c.a.d : $\begin{cases} z_1'(t) = (1+i)\, z_1(t) \\ z_2'(t) = (1-i)\, z_2(t) \end{cases}$

c.a.d. $\begin{cases} z_1(t) = k_1 e^{(1+i)t} \\ z_2(t) = k_2 e^{(1-i)t} \end{cases}$

$$\Rightarrow X(t) = P \; z(t)$$

$$= k_1 \underbrace{e^{(1+i)t} \begin{bmatrix} 2 \\ -1-i \end{bmatrix}}_{= X_1(t)} + k_2 \underbrace{e^{(1-i)t} \begin{bmatrix} -2 \\ 1-i \end{bmatrix}}_{= X_2(t)}$$

On a $X(t) \in \mathbb{C}^2$, on veut passer à $X(t) \in \mathbb{R}^2$:

$$X(t) = k_1 \, \mathrm{Re}(X_1(t)) + k_2 \, \mathrm{Im}(X_2(t))$$

$$= \dots$$

$$= k_1 e^t \begin{bmatrix} 2\cos(t) \\ \sin(t) - \cos(t) \end{bmatrix} + k_2 e^t \begin{bmatrix} 2\sin(t) \\ -\sin(t) - \cos(t) \end{bmatrix}$$

Exo 2 : Faire la "Méthode 2"

1) A est semblable à B lorsque $\exists P$ inversible telle $A = PBP^{-1}$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Poly caract: $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 3)^2$

$\Rightarrow \lambda_1 = 3$ de multiplicité 2

vecteur propre $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \ker(A - \lambda_1 I)$

On cherche $v_2 \in \ker((A - \lambda_1 I)^2)$

car il nous faut 2 vecteurs et que $\ker(A - \lambda_1 I)$ n'en a qu'un seul indépendant

$\rightarrow$ Prendre $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$A v_2 = 1 v_1 + 3 v_2$

$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

(Vérifier que $A = P T P^{-1}$)

- Changement de variable:

$$Z(t) = P^{-1} X(t)$$

On obtient: $Z'(t) = T \, Z(t)$

$$\begin{cases} z_1'(t) = 3 z_1(t) + z_2(t) \\ z_2'(t) = 3 z_2(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1'(t) = 3z_1(t) + k_2 e^{3t} & (**) \\ z_2(t) = k_2 e^{3t} \end{cases}$$

- Pour $(**)$, on trouve les solutions homogènes:

$$z_{1,h}(t) = k_1 e^{3t}$$

On fait une variation de la constante pour trouver une solution particulière :

$$z_{1,p}(t) = k_1(t) e^{3t}$$

On inject dans $(**)$ et on a:

$$k_1'(t)\cancel{e^{3t}} + \cancel{3k_1(t)e^{3t}} = \cancel{3k_1(t)e^{3t}} + k_2 \cancel{e^{3t}}$$

$$\Rightarrow k_1'(t) = k_2$$

$$\Rightarrow k_1(t) = k_2 t + k_3$$

Donc $z_{1,p}(t) = (k_2 t + k_3) e^{3t}$

D'où,

$$z_1(t) = z_{1,h}(t) + z_{1,p}(t)$$

$$= k_1 e^{3t} + k_2 t e^{3t} + k_3 e^{3t}$$

k_4

$$= k_4 e^{3t} + k_2 t e^{3t}$$

D'où :

$$Z(t) = \begin{bmatrix} k_4 e^{3t} + k_2 t e^{3t} \\ k_2 e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{X(t) = P\, Z(t)}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_4 e^{3t} + k_2 t e^{3t} \\ k_2 e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (k_4 + k_2) e^{3t} + k_2 t e^{3t} \\ k_2 e^{3t} \end{bmatrix}$$

② "Méthode des espaces caractéristiques" (voir Rappels)

On trouve $V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ comme avant.

Puis la solution est donnée par :

Voir Rappels ci-dessus

$$X(t) = k_1 e^{\lambda t} \left[I_n + t (A - \lambda I_n) \right] V_1,$$

$$+ k_2 e^{\lambda t} \left[I_n + t (A - \lambda I_n) \right] V_2,$$

avec $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

⚠ erreur ?! $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

$$= \dots = k_1 e^{3t}\begin{bmatrix}1+t\\t\end{bmatrix} + k_2 e^{3t}\boxed{\begin{bmatrix}-t\\1+t\end{bmatrix}}$$

D'où :

$$\begin{cases} x(t) = k_1 e^{3t}(1+t) \overset{+}{\cancel{-}} k_2 e^{3t} \overset{1}{\cancel{t}} \\ y(t) = k_1 e^{3t}\, t + k_2 e^{3t} \overset{1}{\cancel{(1+t)}} \end{cases}$$

avec $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

Exercice 3 :

1) $$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- $\chi_A(\lambda) = \dots = -\lambda(\lambda-2)^2$
- Pour $\lambda = 0$: $V_0 = \begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}$
- Pour $\lambda = 2$: $V_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\tilde{V_2} = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$

Donc, les solutions sont de la forme :

$$X(t) = \underbrace{k_1 \, e^{0t} \, V_0}_{\text{v.p. simple}}$$
$$+ k_2 e^{2t} \left[I_3 + t(A - 2I_3) \right] V_2$$
$$+ k_3 e^{2t} \left[I_3 + t(A - 2I_3) \right] \tilde{V}_2$$

"méthode des espaces caractéristiques"

$$= \dots = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 e^{2t} + k_3 t e^{2t} \\ -2k_1 + k_3 e^{2t} \\ 2k_1 + k_3 e^{2t} \end{bmatrix}$$

avec $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$, et $t \in \mathbb{R}$

(2) $A = \begin{bmatrix} -6 & 5 & 3 \\ -8 & 7 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 1/x \\ 0 \\ 2/x \end{bmatrix}$

système $\Leftrightarrow$ $X'(t) = AX(t) + B$

* **Solutions homogènes :** pour $X_h'(t) = AX_h(t)$

$\chi_A(\lambda) = -\lambda(\lambda - 1)^2$

- **Pour $\lambda = 0$:** $V_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

- **Pour $\lambda = 1$:** $V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\in \ker(A - \lambda I_3)$, $\quad \tilde{V}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\in \ker((A - \lambda I_3)^2)$

"espace propre" "espace caractéristique"

$$\Rightarrow X_h(t) = k_1 e^{0t} V_0 + k_2 e^t [I_3 + t(A - I_3)] V_1 + k_3 e^t [I_3 + t(A - I_3)] \tilde{V}_1$$

$$= \dots = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 e^t & + k_3 (1+2t) e^t \\ k_2 2 e^t & + k_3 \; 4t e^t \\ 2k_1 - k_2 e^t & + k_3 (3-2t) e^t \end{bmatrix}$$

⊛ Solution particulière : Variation de la constante :

On remplace k_1 par $k_1(t)$
k_2 par $k_2(t)$
k_3 par $k_3(t)$

On remarque que la solution homogène s'écrit :

$$X_h(t) = V(t) \; K$$

avec $V(t) = \begin{bmatrix} 1 & e^t & (2t+1)e^t \\ 0 & 2e^t & 4t e^t \\ 2 & -e^t & (-2t+3)e^t \end{bmatrix}$ et $K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$

→ La variation de la constante revient à prendre $K(t)$ à la place de K :

$$X_p(t) = V(t) \; K(t)$$

On injecte X_p dans l'EDO et on trouve $K(t)$:

$$X'(t) = A X(t) + B$$

$$\Leftrightarrow \quad V'(t) K(t) + V(t) K'(t) = A V(t) K(t) + B \quad (*)$$

Or, comme X_h vérifie $X_h'(t) = A X_h(t)$,

et $X_h(t) = V(t) K$, on a:

$$V'(t) = A V(t)$$

$\Rightarrow$ Il reste dans $(*)$:

$$V(t) K'(t) = B$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_1'(t) + (2k_3'(t)\, t + k_2'(t) + k_3'(t))e^t = \frac{1}{t} \\ (4 k_3'(t)\, t + 2 k_2'(t))e^t = 0 \\ 2 k_1'(t) + (-k_2'(t) - 2 k_3'(t) t + 3k_3'(t)) \underset{e^t}{\uparrow} = \frac{2}{t} \end{cases}$$

$$L_2 \Rightarrow k_2'(t) = -2 k_3'(t)\, t$$

$$L_1 \Rightarrow k_1'(t) = \frac{1}{t} - (2k_3'(t) t + \underbrace{k_2'(t)}_{= -2k_3'(t)t} + k_3'(t))e^t$$

$$= \frac{1}{t} - k_3'(t) e^t$$

$$L_3 \Rightarrow \cancel{\frac{2}{t}} - 2 k_3'(t)e^t + \left[-(\cancel{-2k_3'(t)t}) - \cancel{2k_3'(t)t} + 3k_3'(t)\right] e^t = \cancel{\frac{2}{t}}$$

$$\Rightarrow k_3'(t) \underbrace{e^t}_{} = 0$$

$$\Rightarrow \quad k_3'(t) = 0e^{-t} \Rightarrow \boxed{k_3(t) = c_3}$$
$$= 0$$

$$\Rightarrow \quad k_2'(t) = 0 \quad \Rightarrow \boxed{k_2(t) = c_2}$$

et $k_1'(t) = \frac{1}{t} \quad \Rightarrow \boxed{k_1(t) = \ln(t) + c_1}$

(bien défini car $t>0$)

Comme on cherche seulement une solution particulière, on peut prendre $c_1 = c_2 = c_3 = 0$

Ainsi, $K(t) = \begin{bmatrix} \ln(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \quad X_p(t) = V(t) \cdot K(t)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & e^t & (2t+1)e^t \\ 0 & 2e^t & 4t\, e^t \\ 2 & -e^t & (-2t+3)e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \ln(t) \\ 0 \\ 2\ln(t) \end{bmatrix}$$

Ainsi, la solution générale est:

$$X(t) = X_h(t) + X_p(t)$$

$$= \begin{bmatrix} k_1 + (2k_3 t + k_2 + k_3)e^t + \ln(t) \\ (4k_3 + 2k_2)\, e^t \\ 2k_1 + (-2k_3 t - k_2 + 3k_3)e^t + 2\ln(t) \end{bmatrix}$$

avec $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$

<u>Remarque:</u> (Fantin) si l'on a :

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - a)(\lambda - b)^2$$

mais qu'on ne trouve qu'un seul vecteur indépendant $v_b \in \ker(A - bI)$, au lieu de chercher $\tilde{v}_b \in \ker((A-bI)^2)$, on peut gagner du temps en prenant directement

$$\tilde{v}_b = v_a \wedge v_b$$

vecteur propre pour $\lambda = a$

vecteur propre pour $\lambda = b$

→ **Justification théorique :** on a le droit grâce au Thm de décomposition spectrale, qui que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ se décompose en vecteurs de $\ker(A - aI)$ et de $\ker((A-bI)^2)$, et comme $V_a \wedge V_b \perp \ker(A-aI)$, on a bien que $V_a \wedge V_b \in \ker((A-bI)^2)$.

AUTRES SOLUTIONS

Exercice 4 :

1. • $\chi_A(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^3$

• Pour $\lambda = 0$: Par exemple $V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

• Pour $\lambda = 1$: On a : $V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $V_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \ker(A - 1I)$

→ il nous faut un 3e vecteur, on passe au carré :

$$V_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \ker((A - 1I)^2)$$

$\{V_2, V_3, V_4\}$ forme une base de $\ker((A - 1 \cdot I)^2)$

$$\Rightarrow Y(t) = k_1 e^{0t} V_1 + k_2 e^t [I_4 + t(A - I_4)] V_2 + k_3 e^t [I_4 + t(A - I_4)] V_3 + k_4 e^t [I_4 + t(A - I_4)] V_4$$

$$= \begin{bmatrix} k_1 + k_2 e^t \\ k_3 e^t + k_4 t e^t \\ k_4 e^t \\ -k_1 + k_4 e^t \end{bmatrix}$$

② A est triangularisable :

$$A = P \, T \, P^{-1}$$

avec $P = [V_1 | V_2 | V_3 | V_4]$

et $T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \exp(tA) = \exp(t P T P^{-1})$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t P T P^{-1})^k}{k!}$$

$$= P \left(\sum_{k=0}^{+\infty} t^k \frac{T^k}{k!} \right) P^{-1}$$

On,
$$T^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \forall k \geq 0 \quad \text{et} \quad T^0 = I_4$$

$$\Rightarrow \quad \exp(tA) = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sum_k \frac{t^k}{k!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum_k \frac{t^k}{k!} & \sum_k \frac{t^k}{(k-1)!} \\ 0 & 0 & 0 & \sum_k \frac{t^k}{k!} \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$= P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$= \boxed{\begin{bmatrix} e^t & 0 & 1-e^t & -1+e^t \\ 0 & e^t & te^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & -1-e^t & 1 \end{bmatrix}}$$

Exercice 5 :

1. $$X'(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}}_{=A} X(t)$$

2. • l'équation scalaire est $x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$

$\Rightarrow$ $x(t) = B\cos(\omega t) + C\sin(\omega t)$

avec $B, C \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$.

• $X'(t) = AX(t) \Rightarrow X(t) = \exp(tA)\begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix}$

• En $t=1$:

$$\exp(A)\begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix} = X(1) = \begin{bmatrix} x(1) \\ \frac{1}{\omega}x'(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega) & \sin(\omega) \\ -\sin(\omega) & \cos(\omega) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\exp(A) = \begin{bmatrix} \cos(\omega) & \sin(\omega) \\ -\sin(\omega) & \cos(\omega) \end{bmatrix}}$$

3. $$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(A^2)^k}{2k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(A^2)^k \cdot A}{(2k+1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\omega^2)^k}{(2k)!} I_2 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\omega^2)^k}{(2k+1)!} A$$

$$= \cos(w) \qquad = \frac{\sin(w)}{w}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(w) & 0 \\ 0 & \cos(w) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \sin(w) \\ -\sin(w) & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \boxed{\begin{bmatrix} \cos(w) & \sin(w) \\ -\sin(w) & \cos(w) \end{bmatrix}}$$

Exo 6 :

1 Les matrices triangles restent triangulaires quand on les multiplie, et les coeff. diagonaux se multiplie entre eux respectivement.

2 Si $A = PTP^{-1}$

alors $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(PTP^{-1})^k}{k!}$

$$= P \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{T^k}{k!} \right) P^{-1}$$

$$= P \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n^k \end{bmatrix} \right) P^{-1}$$

$$= P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$\Rightarrow \det(\exp(A)) = \det\left(\begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}\right) = e^{\lambda_1} \cdots e^{\lambda_n}$$

$$= e^{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n} = \boxed{e^{Tr(A)}}$$

(3)
- $\det$: polynomial $\Rightarrow C^\infty$
- $t \mapsto \exp(tA) \in \mathcal{C}^\infty$

$\Rightarrow D$ dérivable

$$D'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{D(t+h) - D(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{D(h) - 1}{h} \times D(t)$$

On $\exp(hA) = I_n + hA + o(h)$

$$\Rightarrow D(h) = \det(\exp(hA)) = \det(I_n) + d_{I_n}(hA + o(h)) + o(h)$$

$$= 1 + h\, Tr(A) + o(h)$$

$$\Rightarrow \boxed{D'(t) = \lim_{h \to 0} (Tr(A) + o(h)) D(t) = Tr(A) D(t)}$$

Solution: $D(t) = D(0)\, e^{t \cdot Tr(A)} = e^{t \cdot Tr(A)}$

Pour $t = 1$: $\boxed{\det(e^A) = e^{Tr(A)}}$.