TD6

définition : Si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ est localement intégrable, sa transformée de Laplace est :

$$\mathcal{L}[f](z) := \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-zt}\, dt$$

où $z \in \mathbb{C}$.

Important : la transformée de Laplace permet de résoudre les EDO car :

(i) $\mathcal{L}$ est linéaire $\Rightarrow$ $\mathcal{L}[ay''+by'+cy] = a\mathcal{L}[y''] + b\mathcal{L}[y'] + c\mathcal{L}[y]$

(ii) $\mathcal{L}[y'](z) = z\,\mathcal{L}[y](z) - \lim\limits_{t \to 0^+} y(t)$

(iii) Si $\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[g]$, alors $f = g$ (presque partout) sur $\mathbb{R}_+$

Bonus : Si l'on connait $\mathcal{L}[f]$, alors on peut retrouver f avec l'inversion de Bromwitch :

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}[f](x+iy)\, e^{(x+iy)t}\, dy$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z) > a$:

Ex : • $\mathcal{L}[e^{at}](z) = \dots = \left[\frac{1}{a-z} e^{(a-z)t}\right]_0^{+\infty}$

On, $\lim_{t \to +\infty} e^{(a-z)t} = \lim_{t \to +\infty} \underbrace{e^{(\underbrace{a - \mathrm{Re}(z)}_{<0})t}}_{\to 0} \underbrace{e^{-i\mathrm{Im}(z)t}}_{\text{borné}} = 0$

Donc, $\boxed{\mathcal{L}[e^{at}](z) = -\frac{1}{a-z} = \frac{1}{z-a}}$ à connaître

• $\boxed{\mathcal{L}[te^{at}](z) = \dots = \frac{1}{(z-a)^2}}$

faire une IPP

Exo 1 :

1) $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^t$

$\Rightarrow \mathcal{L}[y''](z) - 3\mathcal{L}[y'](z) + 2\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[e^t]$

On, $\mathcal{L}[y'](z) = z\mathcal{L}[y](z) - \underbrace{\lim_{t \to 0^+} y(t)}_{= y(0) = 1 \text{ par les conditions initiales}}$

$= z\mathcal{L}[y](z) - 1$

et $\mathcal{L}[y''](z) = z\mathcal{L}[y'](z) - \underbrace{\lim_{t \to 0^+} y'(t)}_{= y'(0) = 0}$

$\Leftrightarrow z^2 \mathcal{L}[y](z) - z$

et $\mathcal{L}[e^t](z) = \dfrac{1}{z-1}$

Il reste :

$$\underbrace{(z^2 - 3z + 2)}_{=(z-1)(z-2)} \mathcal{L}[y](z) - z + 3 = \frac{1}{z-1}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[y](z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-2)} - \frac{-z+3}{(z-1)(z-2)}$$

dénom. commun

$$= \frac{1 + z^2 - z - 3z + 3}{(z-1)^2(z-2)}$$

$$= \frac{z^2 - 4z + 4}{(z-1)^2(z-2)} = \frac{(z-2)^2}{(z-1)^2(z-2)}$$

$$= \frac{z-2}{(z-1)^2}$$

Rappel : " Décomposition en éléments simples "

ex : $\dfrac{1}{(z-a)^2(z-b)} = \dfrac{\alpha}{z-a} + \dfrac{\beta}{(z-a)^2} + \dfrac{\gamma}{z-b}$

$\exists\, \alpha, \beta, \gamma$

$$= \frac{z-1-1}{(z-1)^2} = \frac{z-1}{(z-1)^2} + \frac{-1}{(z-1)^2}$$

$$= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{(z-1)^2}$$

$$= \mathcal{L}[e^t](z) - \mathcal{L}[t e^t](z)$$
$$= \mathcal{L}[(1-t)e^t](z)$$

Donc, $\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[(1-t)e^t]$

d'où $\boxed{y(t) = (1-t)e^t}$ pour $t \in \mathbb{R}_+$

- Avec la méthode usuelle, on a le même résultat, mais c'est plus long:
  - polynôme caractéristique : $r^2 - 3r + 2$
    → racines : $r_1 = 1$ $r_2 = 2$
  - solutions homogènes : $y_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$
  - Solution particulière : variation des constantes :
    $$y_p(t) = C_1(t) e^t + C_2(t) e^{2t}$$
    On injecte dans l'EDO, et on trouve :
    $$y_p(t) = -t e^t$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} - t e^t$$

- On utilise les conditions initiales pour trouver $c_1 = 1$, $c_2 = 0$

D'où $\boxed{y(t) = (1-t)e^t}$

2