MATHEMATIQUES - 2 IC INSA
TD 6 - TRANSFORMATION de LAPLACE

Exercice 1
Résoudre les équations causales suivantes par transformation de Laplace.

(1) $y'' - 3y' + 2y = e^t, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

Comparer avec la méthode usuelle.

(2) $y'' + 3y' + 2y = v(t), \quad y(0) = y'(0) = 0,\ v(t) = 1$ si $t \in [0, 1]$, $v(t) = 0$ si $t > 1$.

On exprimera v à l'aide de la fonction H de Heaviside.

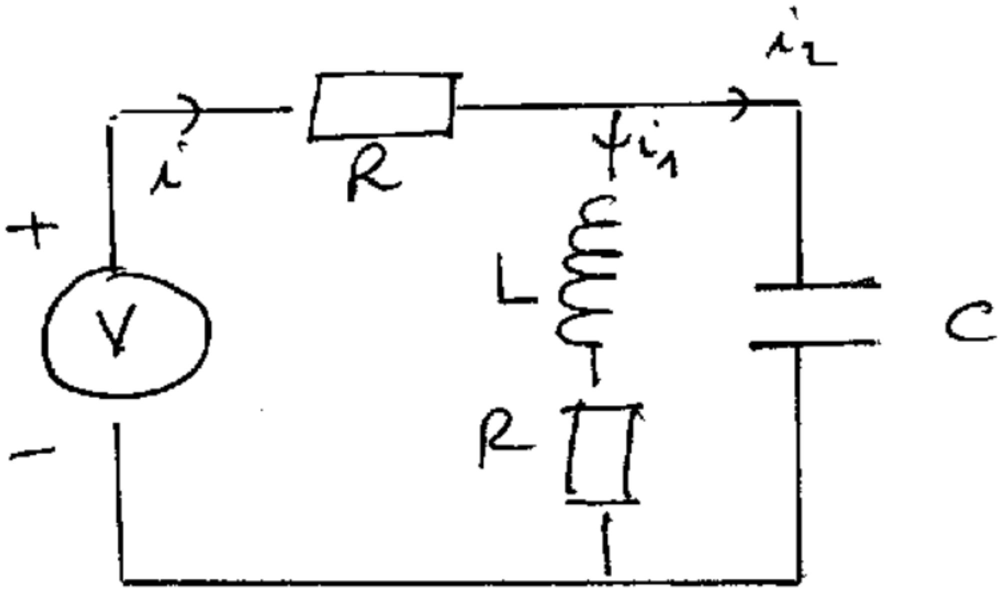
Exercice 2
1. On s'intéresse aux transformées de Laplace de $\cos \omega t$, $\sin \omega t$ ($\omega > 0$).
1.1. Déterminer ces transformées à l'aide des formules d'Euler.
1.2. Retrouver le résultat à partir d'équations différentielles linéaires vérifiées par $\cos \omega t$, $\sin \omega t$.
2. On revient à l'équation $x'' + x = \sin^2 t$, $x(0) = x'(0) = 0$ (cf. **TD 2, Exercice 6**), dans le cadre causal. Trouver sa solution par transformation de Laplace.

Exercice 3
La concentration $C(t)$ de polluant présent dans un lac à l'instant t satisfait l'équation différentielle d'ordre 1 :
$V\ C'(t) = kQ - Q\ C(t),\ t \geq 0$
V est le volume d'eau
Q la quantité d'eau par unité de temps qui alimente le lac
k une constante positive.
La concentration de polluant à l'instant initial est $C(0) = C_0 > 0$.
1. Déterminer l'expression de $C(t)$ en utilisant la transformation de Laplace.
2. Si l'eau qui entre dans le lac n'est pas polluée, alors $k = 0$. Pour quelle valeur de t la concentration de polluant aura-t-elle diminué de moitié par rapport à C_0 ?

Exercice 4
1. Résoudre $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - y \end{cases}$ avec la condition initiale $x(0) = 1,\ y(0) = 0$.

On notera $X = \mathcal{L}x$, $Y = \mathcal{L}y$.

2. Soit le circuit à deux boucles :



2.1. Ecrire le système différentiel d'ordre 2 satisfait par le vecteur de charge $\begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix}$.

On se place dans les conditions de repos initial.

Ecrire le système d'équations linéaires en $\begin{pmatrix} Q_1(z) \\ Q_2(z) \end{pmatrix}$, $Q_i = \mathcal{L}q_i$, $i = 1,\ 2$.

2.2. Effectuer le changement de fonction inconnue $q = q_1'$ et écrire le système différentiel d'ordre 1 satisfait par $\begin{pmatrix} q(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix}$. Le résoudre pour $C = L = 1$, $R = \frac{1}{2}$, $V(t) = 1$, $t \geq 0$.