INSA TOULOUSE

Département STPI
2ème année MIC

Traitement du signal

Aldéric Joulin

A. Joulin
Bureau 115 - Département GMM
ajoulin@insa-toulouse.fr

Année universitaire 2023-2024

Table des matières

Chapitre 1

Rappels sur les suites de fonctions, séries de fonctions et séries entières

Dans ce premier chapitre, on propose quelques rappels sur les suites et séries de fonctions ainsi que sur les séries entières que vous venez d'étudier. Dans toute la suite, on notera I un intervalle (non vide) de $\mathbb{R}$. Toutes les fonctions seront définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Suites de fonctions

Définition 1 *Une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f si pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$; autrement dit,*

$$\forall x \in I, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N} \textit{ tel que } \forall n \geq N_{x,\varepsilon}, \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Pour montrer la convergence simple, il suffit donc d'étudier, pour tout $x \in I$ fixé, la suite de nombres $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 2 *On dit qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f si la suite de terme général $\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$ tend vers 0. Autrement dit,*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \textit{ tel que } \forall n \geq N_\varepsilon, \quad \forall x \in I, \quad |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

On rappelle que $\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$ désigne la borne supérieure (i.e. le plus petit majorant) de l'ensemble $\{|f_n(x) - f(x)|; x \in I\}$. Souvent, on notera cette quantité $\|f_n - f\|_\infty$. C'est la norme uniforme (ou encore norme infinie) de la fonction $f_n - f$.

Dans la formulation avec les quantificateurs, on constate que pour la convergence uniforme, l'entier N_ε doit pouvoir être choisi indépendamment de x, contrairement au cas de la convergence simple.

Méthode 1 *Pour montrer qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge* uniformément,

1. *on commence par identifier une fonction f telle que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f,*
2. *on chercher à majorer $\|f_n - f\|_\infty$ par une suite numérique qui tend vers 0 (parfois, on peut calculer explicitement le supremum mais ce n'est pas toujours le cas).*

La convergence uniforme implique la convergence simple mais la réciproque n'est généralement pas vraie.

Exemple 1 *Si $f_n(x) = x^n$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers* 0 *sur* $[0, 1[$ *mais ne converge pas uniformément vers* 0 *sur cet intervalle. En revanche, la convergence uniforme a lieu sur* $[0, a]$*, quel que soit* $a \in]0, 1[$.

On dit également qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment vers f si pour tout segment $[a, b] \subset I$, la restriction $(f_n|_{[a,b]})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers la restriction $f|_{[a,b]}$.

L'intérêt de la convergence uniforme est mis en évidence dans le résultat suivant :

Théorème 1 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge* uniformément *vers une fonction f sur un intervalle I.*

1. *Si chaque f_n est continue sur I, alors f est continue sur I. Dans ce cas, pour tout $a, b \in I$,*
$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt.$$
2. *Si de plus chaque f_n est dérivable sur I et que la suite (f'_n) converge uniformément sur I vers une fonction g, alors f est dérivable, et $f' = g$.*

Méthode 2 *Pour montrer qu'une suite de fonctions continues $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément, il suffit de montrer qu'elle converge simplement vers une fonction qui n'est pas continue.*

1.2 Séries de fonctions

Définition 3 *Une série de fonctions sur un intervalle I associée à une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur I est la fonction*

$$S : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

qui est définie sur l'ensemble $\{x \in I : \text{ la série } \sum_n f_n(x) \text{ converge}\}$.

Souvent, on notera $\sum_n f_n$ au lieu de S. L'une des difficultés est qu'il faut solliciter à la fois la théorie des séries numériques et la théorie des suites de fonctions. Pour surmonter cette difficulté, il faut sans cesse se demander si l'objet qu'on considère est un nombre ou une fonction.

1.2.1 Convergence simple, absolue, uniforme, normale

Dans toute la suite, on se donne une suite de fonctions $f_n : I \to \mathbb{R}$ définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et on considère la série de fonctions $\sum_n f_n$, qui est définie sur une partie de I.

Définition 4 *La série de fonctions $\sum_n f_n$ converge simplement sur I si $\forall x \in I$, la série numérique $\sum_n f_n(x)$ converge.*

Définition 5 *La série de fonctions $\sum_n f_n$ converge absolument sur I si $\forall x \in I$, la série numérique $\sum_n |f_n(x)|$ converge.*

On retrouve alors le même résultat que pour les séries numériques :

Proposition 1 *Si une série de fonctions converge absolument, alors elle converge simplement.*

Par exemple, la série $\sum_n \frac{x^n}{n}$ converge absolument sur $]-1,1[$ (critère de D'Alembert). Elle converge simplement sur $[-1,1[$ (en -1, on utilise le critère des séries alternées).

Définition 6 *La série de fonctions $\sum_n f_n$ converge uniformément sur I si la suite des sommes partielles $S_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ converge uniformément sur I.*

On a déjà vu que si une suite de fonctions converge uniformément vers une fonction g, alors elle converge simplement vers g. Il en va de même pour les séries : si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément, alors elle converge simplement. Or, la seule fonction vers laquelle la suite des S_n peut converger simplement est la fonction

$$S : x \mapsto \lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x).$$

Donc ce qui est implicite dans l'énoncé de cette définition, c'est que lorsque la suite des sommes partielles $S_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ converge uniformément, c'est forcément vers la fonction S :

$$\lim_{n\to+\infty} \|S_n - S\|_\infty = 0.$$

Lorsqu'on fait la différence $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) - S_n(x)$, on obtient le reste de la série

$$R_{n+1}(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x).$$

Dire que la série $\sum_k f_k$ converge uniformément est donc équivalent à dire que la suite de fonctions $(R_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers 0.

Définition 7 *La série de fonctions $\sum_n f_n$ converge normalement sur I si la série numérique $\sum_n \|f_n\|_\infty$ est convergente.*

Méthode 3 *Pour montrer la convergence normale d'une série de fonctions, on majore $\|f_n\|_\infty$ par une quantité qui est le terme général d'une série numérique convergente.*

Exemple 2 *La série $\sum_n \frac{x^n}{n!}$ converge normalement sur $[-M, M]$, pour tout $M > 0$. En revanche, elle ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$.*

Proposition 2 *La convergence normale implique la convergence absolue et la convergence uniforme.*

Méthode 4 *Pour montrer la convergence uniforme d'une série de fonctions, il est souvent plus simple de chercher à montrer la convergence normale (mais il existe des séries de fonctions qui convergent uniformément mais pas normalement).*

Exemple 3 *La série* $\sum_{n\geq 1} \frac{1+\cos(nx)}{n^2+x^2}$ *converge uniformément sur* $\mathbb{R}$.

En effet, on peut majorer $\sup_{\mathbb{R}} |\frac{1+\cos(nx)}{n^2+x^2}|$ par $\frac{2}{n^2}$. Or la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \frac{1+\cos(nx)}{n^2+x^2}$ converge normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

1.2.2 Propriétés de la somme

Proposition 3 *Si chaque fonction* $f_n : I \to \mathbb{R}$ *est continue et si la série* $\sum_n f_n$ *converge uniformément sur* I *vers une fonction* f*, alors* $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est continue sur* I.

Proposition 4 *Si chaque fonction* $f_n : I \to \mathbb{R}$ *est continue et si la série* $\sum_n f_n$ *converge uniformément sur* I*, alors pour tout* $a, b \in I$*, la série numérique* $\sum_n \int_a^b f_n(t)\,dt$ *converge et*

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt.$$

Proposition 5 *On suppose que chaque* $f_n : I \to \mathbb{R}$ *est dérivable et que les séries* $\sum_n f_n$ *et* $\sum_n f_n'$ *convergent uniformément sur* I*. Alors la fonction* $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est dérivable et*

$$f' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'.$$

Dans les trois propositions précédentes, il suffit d'avoir la convergence uniforme sur tout segment de I.

1.2.3 Cas des séries alternées

Il existe un cas important de séries pour lequel la convergence normale est souvent mise en défaut, mais où il est facile de montrer la convergence uniforme : les séries de fonctions alternées.

Définition 8 *Soit* $f_n : I \to \mathbb{R}$ *une suite de fonctions. On dit que* $\sum_n f_n$ *est une série (de fonctions) alternée si pour tout* $x \in I$*, la série numérique* $\sum_n f_n(x)$ *est une série alternée, c'est-à-dire :*

1. $\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, (-1)^n f_n(x) \geq 0$,
2. $\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, |f_{n+1}(x)| \leq |f_n(x)|$,
3. $\forall x \in I, \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

D'après le théorème des séries alternées, la série numérique $\sum_n f_n(x)$ converge pour tout $x \in I$. Autrement dit, la série de fonctions $\sum_n f_n$ converge simplement sur I.

Théorème 2 *Soit* $\sum_n f_n$ *une série (de fonctions) alternée. On suppose que la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* 0 *sur* I*. Alors la série de fonctions* $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *converge uniformément sur* I.

En particulier, si chaque f_n est continue sur I, on en déduit que $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est aussi continue sur I.

Exemple 4 *La série de fonctions* $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n+x^2}$ *converge uniformément sur* $\mathbb{R}$.

Méthode 5 *Pour montrer qu'une série de fonctions* $\sum_n f_n$ *converge uniformément, on peut*

1. *essayer de montrer qu'elle converge normalement, c'est-à-dire que la série numérique* $\sum_n \|f_n\|_\infty$ *converge ; pour cela,*
   (a) *on pourra trouver un majorant* α_n *de* $\|f_n\|_\infty$*,*
   (b) *tel que la série* $\sum_n \alpha_n$ *converge ;*
2. *vérifier si* $\sum_n f_n$ *est une série entière (voir ci-dessous) : on sait alors qu'elle converge uniformément sur tout segment de son intervalle de convergence ;*
3. *vérifier si* $\sum_n f_n(x)$ *est une série alternée pour tout* $x \in I$*. On sait alors que la série* $\sum_n f_n$ *converge simplement. On pourra conclure que la série converge uniformément si la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* 0.

1.3 Séries entières

On peut voir les séries entières comme une généralisation des polynômes, où il y aurait une infinité de termes. Comme chaque fois qu'on *manipule l'infini*, il faut en préciser le sens :

Définition 9 *Une série entière est une série de fonctions de la forme* $\sum_n a_n x^n$.

Toutes les séries entières convergent en au moins un point : $x = 0$. Les sommes partielles $S_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n$ associées à une série entière, sont des polynômes. C'est en ce sens que les séries entières peuvent être considérées comme des limites de polynômes.

Exemple 5 *La série entière* $\sum_n x^n$ *converge sur* $]-1,1[$ *et diverge grossièrement en dehors de cet intervalle.*

En fait, on peut calculer la somme partielle

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} x^n = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}.$$

On en déduit que

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

On pourra vérifier que

Exemple 6 1. $\sum_n nx^n$ *converge sur* $]-1,1[$ *(critère de D'Alembert),*

2. $\sum_n \frac{x^n}{n+1}$ *converge sur* $[-1,1[$ *(en* -1*, on utilise le critère des séries alternées),*
3. $\sum_n \frac{x^n}{n!}$ *converge sur* $\mathbb{R}$ *(critère de D'Alembert).*

Théorème 3 *Soit* $\sum_n a_n x^n$ *une série entière. Il existe* $R \in [0,+\infty]$ *tel que*

1. *pour tout* $x \notin [-R,R]$*, la série diverge,*
2. *pour tout* $x \in]-R,R[$*, la série converge absolument.*

Ce nombre R est appelé le rayon de convergence de la série. Le théorème ne dit rien sur ce qui se passe pour $x = R$ ou $x = -R$. Ainsi, la somme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ a pour domaine de définition soit $]-R, R[$, soit $[-R, R]$, soit $[-R, R[$, soit $]-R, R]$.

On peut montrer que la série converge normalement sur tout segment $[-r, r] \subset]-R, R[$.

Remarque 1
1. *Si une série entière $\sum_n a_n x^n$ diverge en un point x_0, alors son rayon de convergence est $\leq |x_0|$.*
2. *Si $\sum_n |a_n| R^n$ converge, alors la série entière converge normalement et donc uniformément sur $[-R, R]$.*

La proposition suivante donne un critère pratique pour calculer le rayon de convergence d'une série $\sum_n a_n x^n$ (c'est une conséquence du critère de D'Alembert).

Proposition 6 *Si la suite $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_n$ converge vers $\ell \in [0, +\infty]$, alors $R = \frac{1}{\ell}$.*

Dans cet énoncé, on utilise la convention $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$. Il se peut que la limite de $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_n$ n'existe pas. Mais le rayon de convergence, lui, est toujours défini.

1.3.1 Comparaisons de rayon de convergence

Comme pour les séries numériques, la comparaison de séries entières est un outil puissant pour déterminer les rayons de convergence.

Remarque 2 *Soient $\sum_n a_n x^n$ et $\sum_n b_n x^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectifs R_a et R_b. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq |b_n|$, alors $R_a \geq R_b$.*

Proposition 7 *Les séries $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, $\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ ont le même rayon de convergence.*

Proposition 8 *Soient $\sum_n a_n x^n$ et $\sum_n b_n x^n$ deux séries entières. On suppose que $a_n \sim b_n, n \to +\infty$. Alors les deux séries ont même rayon de convergence.*

1.3.2 Propriétés de la somme

Théorème 4 *La somme d'une série entière $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]-R, R[$ (où R désigne le rayon de convergence de la série).*

Exemple 7 *La série entière $\sum_n \frac{x^n}{n!}$ est de rayon de convergence $R = +\infty$. Sa somme f est donc $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. De plus,*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Or, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^{N-1}}{(N-1)!} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{x^n}{n!}.$$

Comme les deux séries convergent, on peut donc passer à la limite $N \to +\infty$ pour obtenir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{1.1}$$

On a donc montré que f est solution de l'équation différentielle $f'(x) = f(x)$. On en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda e^x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme de plus $f(0) = 1$, c'est que $\lambda = 1$. En conclusion,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Dans cet exemple, vous pouvez observer que pour établir l'égalité (1.1), on l'a d'abord justifiée pour les sommes partielles, avant de passer à la limite. C'est un fait général : pour toutes séries entières, on peut faire le changement d'indices :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} x^n.$$

Exemple 8 *Si $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, alors*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Une conséquence du théorème est que la somme d'une série entière est une fonction continue, et on peut donc considérer ses primitives :

Corollaire 1 *Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors la primitive de f sur $]-R, R[$ qui s'annule en 0 est*

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Exemple 9 *Une primitive de $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ est $F : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.*

Comme $F'(x) = f(x) = \frac{1}{1-x}$ et $F(0) = 0$, on a

$$F(x) = -\ln(1-x).$$

On a donc montré que pour tout $x \in]-1, 1[$, $-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$, soit encore, en faisant le changement de variables $y = -x$,

$$\ln(1+y) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{y^n}{n}.$$

1.3.3 Fonctions développables en séries entières

La formule de Taylor assure que si f est $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle ouvert I contenant 0, alors on peut écrire pour tout $n \geq 0$,

$$\forall x \in I, \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(|x|^n),$$

où $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. La question est alors de savoir pour quelles fonctions f et pour quels x on peut écrire :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\,?$$

Autrement dit, quand peut-on sommer jusqu'à l'infini ?

Définition 10 *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant un réel x_0. On dit que f est développable en série entière (DSE) en x_0 sur $]x_0 - R, x_0 + R[\subset I$ s'il existe une série entière $\sum_n a_n y^n$ de rayon de convergence $\geq R$ tel que*

$$\forall x \in]x_0 - R, x_0 + R[, \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Proposition 9 *Si f est DSE en x_0 sur $]x_0 - R, x_0 + R[\subset I$, alors f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]x_0 - R, x_0 + R[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Ainsi, les coefficients du développement en série entière étant entièrement déterminés par f, ils sont donc uniques :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (x - x_0)^n \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = b_n.$$

Il existe des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ qui ne sont pas DSE. On en présente un exemple dans la troisième partie.

Remarque 3 *Si f est DSE en 0 sur $]-R, R[$ avec $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, alors f' est DSE en 0 sur $]-R, R[$ avec*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

De plus, la primitive $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ est DSE en 0 sur $]-R, R[$ avec

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Exemple 10
1. $\exp x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad R = +\infty,$
2. $\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad R = +\infty,$

3. $\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad R = +\infty,$
4. $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad R = 1,$
5. $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} C_\alpha^n x^n, \quad R = 1,$
6. $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad R = 1.$

Chapitre 2

Séries de Fourier

Dans un mémoire publié en 1807, Joseph Fourier (1768-1830) montre que l'on peut représenter une fonction comme une somme pondérée infinie de fonctions sinusoïdales. Cette théorie, connue à présent sous le nom d'analyse de Fourier et à la base d'une branche des mathématiques appelée analyse harmonique, a été initialement conçue pour étudier la propagation de la chaleur et a eu depuis de nombreuses applications dans des domaines très variés, notamment en traitement du son et des images. Par exemple cette méthode permet de comprimer les images numériques (ou les sons, les films) sans trop altérer leur qualité visuelle. Le JPEG, format de compression mis au point dans les années 80, permet de réduire jusqu'à 20 fois la place occupée par une image avec une perte de qualité presque imperceptible.

Lorsqu'un signal est représenté comme une somme de sinusoïdes, chaque coefficient de cette somme représente le poids d'une certaine fréquence dans le signal. Pour stocker le signal, il suffit donc de conserver ces coefficients. Plus une fréquence dans la somme est associée à un coefficient petit, moins nous la percevons. On peut donc réduire considérablement la quantité de données à stocker ou à transmettre en éliminant les coefficients trop faibles.

2.1 Introduction

2.1.1 Intégrales de fonctions à valeurs complexes

Dans ce chapitre, toutes les fonctions considérées sont à valeurs dans $\mathbb{C}$ (ce qui n'exclut pas les fonctions qui ne prennent que des valeurs réelles). Une telle fonction est continue si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont :

$$\text{Re}\, f : x \mapsto \text{Re}\,(f(x)) \qquad , \qquad \text{Im}\, f : x \mapsto \text{Im}\,(f(x)).$$

On peut définir l'intégrale d'une telle fonction sur un segment $[a, b]$ en décomposant f en partie réelle et partie imaginaire, sous réserve que ces intégrales aient un sens :

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b \text{Re}\, f(x)\, dx + i \int_a^b \text{Im}\, f(x)\, dx.$$

L'intégrale des fonctions complexes hérite de toutes les propriétés de l'intégrale des fonctions réelles (linéarité, relation de Chasles, etc.).

Par ailleurs, comme nous allons considérer les fonctions comme un signal périodique que l'on cherche à transmettre après compression, nous allons les supposer périodiques : il existe $T > 0$ (appelée la période) telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+T) = f(x).$$

Dans la suite nous prendrons $T = 2\pi$, le cas général pouvant être déduit de ce cas particulier sans trop forcer.

2.1.2 Polynômes trigonométriques à coefficients complexes

On va chercher à écrire une telle fonction périodique comme une somme de sinusoïdes, c'est-à-dire de fonctions de la forme $x \mapsto a\cos kx$ et $x \mapsto b\sin kx$. Cette somme sera généralement infinie. Ainsi, f sera la somme d'une série de fonctions dont chaque terme est une sinusoïde. On va commencer par considérer des sommes finies de fonctions. C'est ce qu'on appelle des polynômes trigonométriques.

Définition 11 *On appelle polynôme trigonométrique à coefficients complexes toute fonction de la forme*

$$P : x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \cos(nx) + \beta_n \sin(nx),$$

où $N \in \mathbb{N}$ et les α_n, β_n sont des nombres complexes.

Comme les fonctions $x \mapsto \cos(nx)$ et $x \mapsto \sin(nx)$ sont toutes 2π périodiques, il en est donc de même de P.

Si l'on veut transmettre la fonction (le signal) P, il est évidemment impossible de communiquer les nombres $P(x)$ pour toutes les valeurs possibles de x (puisqu'il y a une infinité de réels dans $[0, 2\pi]$) ! En revanche, on peut se contenter d'envoyer les valeurs α_n et β_n pour tout $n \in \{0, \ldots N\}$ et le destinataire pourra alors reconstruire le polynôme P.

Réciproquement, étant donné un signal périodique P, on peut calculer les coefficients α_n et β_n grâce à des intégrales faisant intervenir la fonction P. Ainsi, par linéarité de l'intégrale,

$$\int_0^{2\pi} P(x)\,dx = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \int_0^{2\pi} \cos(nx)\,dx + \beta_n \int_0^{2\pi} \sin(nx)\,dx.$$

Comme $x \mapsto \cos(nx)$ et $x \mapsto \sin(nx)$ ont des primitives explicites, il est facile de voir que leur intégrale sur $[0, 2\pi]$ est nulle, sauf pour $\cos$ lorsque $n = 0$:

$$\int_0^{2\pi} \cos(0x)\,dx = \int_0^{2\pi} 1\,dx = 2\pi.$$

On trouve ainsi

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(x)\,dx.$$

Pour obtenir les coefficients α_k et β_k, on multiplie d'abord P par $\cos(kx)$ ou $\sin(kx)$. Par exemple, lorsque $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{2\pi} P(x)\cos(kx)\,dx = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(kx)\,dx + \alpha_n \int_0^{2\pi} \sin(nx)\cos(kx)\,dx.$$

Pour calculer l'intégrale de la fonction $\cos(nx)\cos(kx)$, on cherche d'abord à la linéariser, c'est-à-dire à transformer le produit en une somme. Pour cela, il est commode de passer par l'exponentielle complexe :

$$\begin{aligned}\cos(nx)\cos(kx) &= \frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2} = \frac{e^{i(n+k)x}+e^{-i(n+k)x}+e^{i(n-k)x}+e^{-i(n-k)x}}{4} \\ &= \frac{\cos(n+k)x+\cos(n-k)x}{2}.\end{aligned}$$

On a de même

$$\begin{aligned}\sin(nx)\cos(kx) &= \frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2} = \frac{e^{i(n+k)x}-e^{-i(n+k)x}+e^{i(n-k)x}-e^{-i(n-k)x}}{4i} \\ &= \frac{\sin(n+k)x+\sin(n-k)x}{2}.\end{aligned}$$

En intégrant sur $[0,2\pi]$, il vient lorsque $k\neq n$

$$\int_0^{2\pi}\cos(nx)\cos(kx)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(n+k)x+\cos(n-k)x\,dx = 0,$$

tandis que pour $k=n$,

$$\int_0^{2\pi}\cos(nx)\cos(kx)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(n+k)x+\cos(n-k)x\,dx = \pi.$$

Par ailleurs, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\int_0^{2\pi}\sin(nx)\cos(kx)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin(n+k)x+\sin(n-k)x\,dx = 0.$$

En conclusion, lorsque $k\neq 0$

$$\int_0^{2\pi}P(x)\cos(kx)\,dx = \pi\alpha_k,$$

soit encore

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}P(x)\cos(kx)\,dx.$$

On calcule de même pour tout $k\in\mathbb{N}$,

$$\beta_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}P(x)\sin(kx)\,dx.$$

Dans la suite, on notera $a_0(P)=2\alpha_0$ et pour $k\neq 0$, $a_k(P)=\alpha_k$ et $b_k(P)=\beta_k$ (pour insister sur la dépendance de ces coefficients vis-à-vis du polynôme P). On a donc

$$P(x) = \frac{a_0(P)}{2}+\sum_{n=1}^{N}a_n(P)\cos(nx)+\sum_{n=1}^{N}b_n(P)\sin(nx).$$

En écrivant $\cos(nx) = (e^{inx} + e^{-inx})/2$ et $\sin(nx) = (e^{inx} - e^{-inx})/(2i)$, on obtient

$$\begin{aligned}
P(x) &= \frac{a_0(P)}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n(P)\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + \sum_{n=1}^{N} b_n(P)\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \\
&= \frac{a_0(P)}{2} + \sum_{n=1}^{N} \Big(\frac{a_n(P)}{2} + \frac{b_n(P)}{2i}\Big)e^{inx} + \sum_{n=1}^{N} \Big(\frac{a_n(P)}{2} - \frac{b_n(P)}{2i}\Big)e^{-inx} \\
&= \frac{a_0(P)}{2} + \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n(P) - ib_n(P)}{2}e^{inx} + \sum_{n=-N}^{-1} \frac{a_{-n}(P) + ib_{-n}(P)}{2}e^{inx}.
\end{aligned}$$

En utilisant l'expression de $a_n(P)$ et $b_n(P)$ en fonction de P obtenue précédemment, il vient si $n > 0$,

$$\frac{a_n(P) - ib_n(P)}{2} = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} P(x)\cos(nx)\,dx - i\int_0^{2\pi} P(x)\sin(nx)\,dx\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(x)e^{-inx}\,dx,$$

tandis que si $n < 0$,

$$\frac{a_{-n}(P) + ib_{-n}(P)}{2} = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} P(x)\cos(-nx)\,dx + i\int_0^{2\pi} P(x)\sin(-nx)\,dx\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(x)e^{-inx}\,dx.$$

Ainsi,

$$P(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(P)e^{inx},$$

en posant

$$c_n(P) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(x)e^{-inx}\,dx.$$

Plus généralement, on a la définition suivante.

Définition 12 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et 2π périodique. Ses coefficients de Fourier trigonométriques sont définis pour tout $n \in \mathbb{N}$ par*

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx.$$

Ses coefficients de Fourier complexes sont donnés pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx.$$

Les calculs précédents montrent que

$$c_n(f) = \begin{cases} (a_n(f) - ib_n(f))/2 & \text{si} \quad n > 0, \\ a_0(f)/2 & \text{si} \quad n = 0, \\ (a_{-n}(f) + ib_{-n}(f))/2 & \text{si} \quad n < 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

On peut aussi exprimer les coefficients $(a_n(f))$ et $(b_n(f))$ avec les formules :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) \quad , \quad b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)).$$

En général on utilise plutôt $a_n(f)$ et $b_n(f)$ si f est à valeurs réelles (auquel cas ces coefficients sont réels), et $c_n(f)$ pour f à valeurs complexes.

Proposition 10 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et 2π périodique.*

1. *Si f est paire, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n(f) = 0$ et*

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x)\cos(nx)dx.$$

2. *Si f est impaire, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$ et*

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x)\sin(nx)dx.$$

On démontrera cette proposition en TD, qui est très utile en pratique.

Définition 13 *La série de Fourier de f est la série de fonctions associée aux sommes partielles suivantes (qui sont des polynômes trigonométriques) : pour tout $N \in \mathbb{N}$,*

$$S_N(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{inx}.$$

Remarque 4 *La série $\sum_n c_n(f)e^{inx}$ est indexée sur $\mathbb{Z}$ et non pas sur $\mathbb{N}$.*

La théorie pour de telles séries se ramène à la théorie classique en disant qu'une série de fonctions $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k$ converge (simplement, uniformément, normalement, etc.) si et seulement si les deux séries $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$ et $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_{-k}$ (qui sont deux séries indexées sur $\mathbb{N}$) convergent (simplement, uniformément, normalement, etc.). Dans ce cas, on définit

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k + \sum_{k=1}^{+\infty} f_{-k} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} f_k + \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} f_{-k}.$$

Proposition 11 *Soit f une fonction 2π périodique de classe $\mathcal{C}^1$. Alors*

1. *la dérivée f' est encore 2π périodique.*
2. *$c_n(f') = inc_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.*

Cette proposition sera démontrée en TD.

À présent la question fondamentale est de savoir si la série de Fourier d'une fonction f converge, autrement dit, est-ce qu'on peut écrire en un certain sens que

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx} \quad ?$$

On va voir que la réponse dépend de la régularité de f. Dans la suite, on note $\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ (respectivement $\mathcal{C}^1_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$) l'ensemble des fonctions continues (resp. $\mathcal{C}^1$) et 2π périodiques à valeurs complexes.

2.2 Convergences

2.2.1 Convergence uniforme et convergence ponctuelle

Injectivité des coefficients de Fourier

Cette section est fondée sur le théorème suivant dont on donnera la preuve ultérieurement :

Théorème 5 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue 2π périodique. Si tous les coefficients de Fourier de f sont nuls, alors $f = 0$.*

Corollaire 2 *Si deux fonctions continues et 2π périodiques f et g ont les mêmes coefficients de Fourier, alors $f = g$.*

Preuve : La fonction $h = f - g$ est continue et 2π périodique. De plus, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} c_n(h) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (f-g)(x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)e^{-inx}\,dx \\ &= c_n(f) - c_n(g) = 0. \end{aligned}$$

On en déduit par le théorème précédent que $h = 0$, d'où la conclusion.

La norme uniforme

On peut introduire sur $\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ la *norme uniforme* $\|\cdot\|_\infty$, où

$$\forall f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C}), \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|.$$

En effet, si une fonction f est continue 2π périodique, alors l'ensemble des valeurs qu'elle prend coïncide avec l'ensemble des valeurs qu'elle prend sur $[0, 2\pi]$ (on utilise ici la 2π périodicité) :

$$f(\mathbb{R}) = \{f(x); x \in \mathbb{R}\} = f([0, 2\pi]).$$

Sur le segment $[0, 2\pi]$, la fonction f est continue, donc est bornée et atteint ses bornes : il existe $c, d \in [0, 2\pi]$ tels que pour tout $x \in [0, 2\pi]$,

$$f(c) \le f(x) \le f(d).$$

Cette double inégalité reste vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. On peut donc définir

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,2\pi]} |f(x)| = \max_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|.$$

On aura donc ici $\|f\|_\infty = \max(|f(c)|, |f(d)|)$.

Coefficients de Fourier sommables

Théorème 6 *Soit $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$. On suppose que la famille des coefficients de Fourier est* sommable *: la série $\sum_{|k|\le n} |c_k(f)|$ converge. Alors $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.*

Preuve : pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$S_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikt}.$$

La convergence normale des sommes partielles signifie par définition que la série numérique

$$\sum_{k=-n}^{n} \|t \mapsto c_k(f) e^{ikt}\|_\infty$$

converge. Or

$$\|t \mapsto c_k(f) e^{ikt}\|_\infty = |c_k(f)|.$$

Par hypothèse, on en déduit la convergence normale de $S_n(f)$, et donc la convergence uniforme de $S_n(f)$ vers une fonction qu'on note g :

$$\lim_{n \to +\infty} \|S_n(f) - g\|_\infty = 0.$$

Il reste à montrer que $f = g$. Comme chaque terme de la somme $t \mapsto c_k(f) e^{ikt}$ est une fonction continue, on en déduit que g est également continue sur $\mathbb{R}$. Par convergence simple, la 2π périodicité de $S_n(f)$ entraîne celle de g. Ainsi $g \in \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}; \mathbb{C})$. Calculons les coefficients de Fourier de g. Par convergence uniforme de $S_n(f)$ vers g sur $[0, 2\pi]$, on a

$$c_k(g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikt} \lim_{n \to +\infty} S_n(f)(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \lim_{n \to +\infty} \int_0^{2\pi} e^{-ikt} S_n(f)(t)\, dt.$$

Or,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikt} S_n(f)(t)\, dt = \sum_{\ell=-n}^{n} c_\ell(f) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikt} e^{i\ell t}\, dt$$

et

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikt} e^{i\ell t}\, dt = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \ell \neq k, \\ 1 & \text{si} \quad \ell = k. \end{cases}$$

Donc pour tout $n \geq k$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikt} S_n(f)(t)\, dt = c_k(f),$$

ce qui implique que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $c_k(g) = c_k(f)$. On en déduit par le corollaire précédent que $f = g$.

$\square$

On peut également montrer la proposition suivante, laissée en exercice (ci-dessous l'item clé est le premier, qui se démontre à l'aide d'une double intégration par parties).

Proposition 12 *Soit $f \in \mathcal{C}^2_{2\pi}(\mathbb{R}; \mathbb{C})$. Alors*

1. *pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, $c_k(f) = \frac{-1}{k^2} c_k(f'')$.*
2. *$|c_k(f'')| \leq \|f''\|_\infty$.*
3. *la série de Fourier converge normalement vers f.*

2.2.2 Convergence simple et théorème de Dirichlet

Fonctions continues par morceaux

Définition 14 *Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction.*

1. *On dit que f est continue par morceaux sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_m = b$ telle que pour tout $i = 0, \ldots, m-1$, $f|_{]a_i,a_{i+1}[}$ est continue et admet des limites $\lim_{x\to a_i^+} f(x)$ et $\lim_{x\to a_{i+1}^-} f(x)$ finies.*
2. *On dit que f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_m = b$ telle que pour tout $i = 0, \ldots, m-1$, $f|_{]a_i,a_{i+1}[}$ est $\mathcal{C}^1$ et admet des limites*

$$\lim_{x\to a_i^+} f(x), \quad \lim_{x\to a_{i+1}^-} f(x), \quad \lim_{x\to a_i^+} f'(x), \quad \lim_{x\to a_{i+1}^-} f'(x),$$

finies.

3. *Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction. On dit que f est continue (respectivement $\mathcal{C}^1$) par morceaux sur I si la restriction de f à tout segment $[a,b] \subset I$ est continue (resp. $\mathcal{C}^1$) par morceaux sur $[a,b]$.*

On note $\mathcal{C}^0_m(I;\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I à valeurs complexes, et $\mathcal{C}^1_m(I;\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^1$ par morceaux. On note enfin $\mathcal{C}^0_{m,2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions 2π périodiques continues par morceaux sur I à valeurs complexes et $\mathcal{C}^1_{m,2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions 2π périodiques $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I à valeurs complexes.

Méthode 6 *Pour montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ périodique de période 2π est continue par morceaux,*

1. *on fait la liste des discontinuités de f dans $[0,2\pi]$,*
2. *on montre qu'en chacune de ces discontinuités, f a une limite finie à gauche et à droite,*
3. *on montre que f a une limite finie à droite en 0 et à gauche en 2π.*

Notons que les valeurs de la fonction aux points de discontinuité importent peu. Par ailleurs, si f est paire ou impaire, il suffit d'étudier les limites à gauche et à droite aux discontinuités contenues dans $[0,\pi]$, ainsi qu'en 0 et en π. Pour montrer que f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux, il faudra faire le même travail avec f'.

On peut définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux en utilisant l'intégrale des fonctions continues de la manière suivante. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. Notons $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_m = b$ ses points de discontinuité : pour tout $i = 0, \ldots, m-1$, $f|_{]a_i,a_{i+1}[}$ se prolonge en une fonction continue à $[a_i, a_{i+1}]$ mais la limite à gauche ou la limite à droite en a_i (ou les deux) ne coïncident pas avec $f(a_i)$.

On définit alors

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\,dt.$$

Noter que chaque terme de la somme de droite est bien défini. En effet, comme $f|_{]a_i,a_{i+1}[}$ se prolonge en une fonction continue à $[a_i, a_{i+1}]$, on sait donner un sens à l'intégrale $\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\,dt$ (intégrale d'une fonction continue sur un segment).

Autrement dit, pour calculer l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment, on découpe ce segment en sous-intervalles sur lesquels la fonction est continue.

Les coefficients de Fourier $a_n(f), b_n(f)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $c_n(f)$ pour $n \in \mathbb{Z}$ d'une fonction continue par morceaux f se définissent exactement de la même manière que pour les fonctions continues.

Considérons à présent une fonction f qui est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur un segment $[a, b]$: il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_m = b$ telle que pour tout $i = 0, \ldots, m-1$, $f|_{]a_i,a_{i+1}[}$ se prolonge en une fonction $\mathcal{C}^1$ à $[a_i, a_{i+1}]$. A priori, la dérivée f' est seulement définie sur $[a, b] \setminus \{a_0, \ldots, a_m\}$, mais pas nécessairement aux points a_i. On peut seulement définir les limites à gauche ou à droite de f' en chaque a_i. En notant g_i le prolongement par continuité de $f'|_{]a_i,b_i[}$ à $[a_i, b_i]$, on peut aussi définir

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(t)\, dt = \int_{a_i}^{a_{i+1}} g_i(t)\, dt.$$

On peut enfin considérer l'intégrale de f' sur $[a, b]$:

$$\int_a^b f'(t)\, dt = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(t)\, dt.$$

On peut montrer que la formule $c_n(f') = in\, c_n(f)$ reste encore valable lorsque f est continue 2π périodique et $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Le théorème de Dirichlet

Lorsque f est seulement continue par morceaux mais pas continue, $S_n(f)$ ne peut pas converger uniformément vers f, car une limite uniforme de fonctions continues est continue. Par contre, on dispose du théorème suivant (dont on admet la preuve). Ci-dessous, si f est une fonction donnée, on appelle la régularisée de f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2}(f(x^-) + f(x^+)),$$

où $f(x^-)$ (resp. $f(x^+)$) désigne la limite à gauche (resp. à droite) de f au point x. En particulier, si f est continue en $x \in \mathbb{R}$, alors $\tilde{f}(x) = f(x)$.

Théorème 7 (Théorème de Dirichlet) *Soit $f \in \mathcal{C}^1_{m,2\pi}(\mathbb{R})$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{n \to +\infty} S_n(f)(x) = \tilde{f}(x),$$

c'est-à-dire que la suite $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $\tilde{f}$, la régularisée de f.

2.2.3 Convergence quadratique

La norme $\|\cdot\|_2$

Sur l'ensemble $\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ des fonctions continues 2π périodiques à valeurs dans $\mathbb{C}$, une autre quantité joue un rôle important pour mesurer les fonctions :

$$\|f\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt} \quad , \quad \forall f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}; \mathbb{C}).$$

L'application $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C}) \mapsto \|f\|_2$ s'appelle la norme 2, ou encore norme quadratique, et vérifie comme son nom l'indique les propriétés d'une norme sur l'espace de fonctions $\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, comme on le verra d'ici peu.

Pour comprendre pourquoi cette norme est naturelle dans le contexte des séries de Fourier, commençons par la calculer pour un polynôme trigonométrique P :

$$P : x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=-N}^{N} \gamma_n e^{inx},$$

avec $N \in \mathbb{N}$ et $\gamma_n \in \mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned}
\|P\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |P(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{P(t)}P(t)\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{\sum_{n=-N}^{N}\gamma_n e^{int}}P(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{n=-N}^{N}\overline{\gamma_n}e^{-int}P(t)\,dt \\
&= \sum_{n=-N}^{N}\overline{\gamma_n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}P(t)\,dt = \sum_{n=-N}^{N}\overline{\gamma_n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}\sum_{m=-N}^{N}\gamma_m e^{imt}\,dt \\
&= \sum_{n=-N}^{N}\overline{\gamma_n}\sum_{m=-N}^{N}\gamma_m\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}e^{imt}\,dt \\
&= \sum_{n=-N}^{N}\overline{\gamma_n}\gamma_n = \sum_{n=-N}^{N}|\gamma_n|^2.
\end{aligned}$$

Autrement dit, on peut calculer explicitement la norme 2 d'un polynôme trigonométrique en fonction de ses coefficients de Fourier. Le théorème principal de cette section, que nous admettrons en partie, affirme que ce calcul reste vrai pour toute fonction continue par morceaux et 2π périodique. C'est l'objet du paragraphe suivant.

Théorème de Parseval

On peut calculer explicitement la norme 2 d'une fonction en termes de ses coefficients de Fourier, et même lorsque la fonction est seulement continue par morceaux.

Théorème 8 *Soit $f \in \mathcal{C}^0_{m,2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Alors*

1. *la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ converge,*
2. *et sa limite est $\|f\|_2^2$.*

Preuve : on montre seulement la première assertion. On observe d'abord que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{S_N(f)(t)}f(t)\,dt &= \sum_{n=-N}^{N}\overline{c_n(f)}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt = \sum_{n=-N}^{N}\overline{c_n(f)}c_n(f) \\
&= \sum_{n=-N}^{N}|c_n(f)|^2 = \|S_N(f)\|_2^2. \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\|f\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |(f(t)-S_N(f)(t)) + S_N(f)(t)|^2\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |(f(t)-S_N(f)(t))|^2\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |S_N(f)(t)|^2\,dt \\
&\quad - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left(\overline{S_N(f)(t)}(f(t)-S_N(f)(t))\right)dt. \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Dans la deuxième égalité, on a utilisé l'identité $|z+z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2\operatorname{Re}\overline{z}z'$. Or,

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left(\overline{S_N(f)(t)}(f(t)-S_N(f)(t))\right)dt = \operatorname{Re}\int_0^{2\pi} \overline{S_N(f)(t)}(f(t)-S_N(f)(t))\,dt$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{S_N(f)(t)}(f(t)-S_N(f)(t))\,dt &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{S_N(f)(t)}f(t)\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{S_N(f)(t)}S_N(f)(t)\,dt \\
&= \|S_N(f)\|_2^2 - \|S_N(f)\|_2^2 = 0.
\end{aligned}$$

Dans la dernière ligne, on a utilisé (2.2).

En revenant à (2.3), il vient donc

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |(f(t)-S_N(f)(t))|^2\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |S_N(f)(t)|^2\,dt.$$

Cette dernière identité peut se réécrire

$$\|f\|_2^2 = \|f-S_N(f)\|_2^2 + \|S_N(f)\|_2^2. \qquad (2.4)$$

En particulier,

$$\|S_N(f)\|_2^2 \le \|f\|_2^2.$$

Or, comme $S_N(f)$ est un polynôme trigonométrique, $\|S_N(f)\|_2^2 = \sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2$ (un calcul que l'on a fait précédemment). La série à termes positifs $\sum_n |c_n(f)|^2$ est majorée donc converge, ce qui montre la première partie de l'énoncé.

□

On peut donc écrire que

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2.$$

En remplaçant $c_n(f)$ par son expression en termes des coefficients $a_n(f)$ et $b_n(f)$, on peut aussi obtenir l'expression de $\|f\|_2$ en fonction de ces derniers : on part de

$$\|f\|_2^2 = |c_0(f)|^2 + \sum_{n\ge 1} |c_n(f)|^2 + \sum_{n\le -1} |c_n(f)|^2$$

En utilisant la correspondance (2.1), on obtient

$$\begin{aligned}
\|f\|_2^2 &= \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \sum_{n\ge 1}\frac{|a_n(f)-ib_n(f)|^2}{4} + \sum_{n\ge 1}\frac{|a_n(f)+ib_n(f)|^2}{4} \\
&= \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{4}\sum_{n\ge 1} |a_n(f)-ib_n(f)|^2 + |a_n(f)+ib_n(f)|^2.
\end{aligned}$$

Avec la formule $|z+z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2\text{Re}\,(z\overline{z'})$ valable pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, on obtient

$$|a_n(f) - ib_n(f)|^2 + |a_n(f) + ib_n(f)|^2 = 2(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2) + 2\text{Re}\,(ia_n(f)\overline{b_n(f)}) \\ - 2\text{Re}\,(ia_n(f)\overline{b_n(f)}) = 2(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2).$$

Ainsi,

$$\|f\|_2^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1} |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2.$$

Lorsque f est simplement continue ou continue par morceaux, on ne peut pas affirmer que sa série de Fourier converge uniformément, ni même simplement. Par contre, on peut dire qu'elle converge pour la norme 2, au sens suivant :

Corollaire 3 *Soit $f \in \mathcal{C}^0_{m,2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Alors*

$$\lim_{N\to+\infty} \|f - S_N(f)\|_2 = 0.$$

Preuve : D'après (2.4),

$$\|f - S_N(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|S_N(f)\|_2^2.$$

Par le théorème précédent, le membre de droite tend vers 0, ce qui montre le corollaire.

□

Le sens de ce corollaire est que l'énergie de la partie négligée d'un signal (le reste de la série) peut être rendue arbitrairement petite, lorsqu'on néglige de moins en moins de termes dans le signal transmis.

Conséquences du théorème de Parseval

Remarque 5 *Le théorème 8 implique aussi le théorème 5 qu'on avait admis au début de la section précédente : si une fonction f continue et 2π périodique a tous ses coefficients de Fourier nuls, alors $f = 0$. En effet, une telle fonction vérifie :*

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = 0,$$

donc $f = 0$.

Le théorème 8 permet enfin d'avoir une condition générale sous laquelle une série de Fourier converge normalement :

Corollaire 4 *Soit $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$. On suppose de plus que f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors la série de Fourier de f converge normalement vers f.*

Preuve : On démontre le résultat sous l'hypothèse (légèrement plus restrictive) que f est dans $\mathcal{C}^1_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, pour ne pas avoir à traiter les discontinuités de f'.

D'après le théorème 6, il suffit de prouver que la série $\sum_n |c_n(f)|$ converge. Comme f' est continue et 2π périodique, le Théorème 8 appliqué à f' implique que la série $\sum_n |c_n(f')|^2$ converge.

Par intégration par parties, il vient que $c_n(f) = \frac{1}{in} c_n(f')$ pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$. Donc en utilisant l'inégalité [1] $|ab| \leq \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2)$ valable pour tout $a, b \in \mathbb{C}$,

$$|c_n(f)| = \frac{1}{n}|c_n(f')| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + |c_n(f')|^2\right).$$

Comme les séries de terme général $1/n^2$ et $|c_n(f')|^2$ convergent, la série de terme général $|c_n(f)|$ converge également.

□

Méthode 7 *Pour développer une fonction 2π périodique f en série de Fourier, on pourra procéder comme suit :*

1. *Tracer le graphe de f sur plusieurs périodes.*
2. *Déterminer la classe de f : continue par morceaux ou continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux ou $\mathcal{C}^1$.*
3. *Calculer les coefficients de Fourier de f : a_k et b_k, ou c_k. On utilisera ici la parité éventuelle de f.*
4. *Appliquer*
   (a) *le théorème de Parseval : convergence en $\|\cdot\|_2$ pour les fonctions continues par morceaux,*
   (b) *le théorème de Dirichlet : convergence en tout point de continuité de f pour les fonctions C^1 par morceaux,*
   (c) *le théorème de convergence normale pour les fonctions continues $\mathcal{C}^1$ par morceaux.*

2.3 Projection orthogonale

2.3.1 Normes

Définition 15 *On appelle norme sur un espace vectoriel E toute application $N : E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant*

1. *(*séparation*) $\forall x \in E$, $N(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$,*
2. *(*positive homogénéité*) $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$,*
3. *(*inégalité triangulaire*) $\forall x, y \in E$, $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.*

Dans ce chapitre, on a introduit une norme, la norme 2 :

$$f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \mapsto \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, dt}.$$

Pour vérifier qu'il s'agit bien d'une norme au sens de la Définition 15, il est commode de commencer par introduire la notion de produit scalaire complexe. La définition diffère légèrement du produit scalaire réel.

1. Observer que $0 \leq (|a| + |b|)^2 \leq |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b|$.

Définition 16 *Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Un produit scalaire complexe (ou hermitien) est une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ telle que*

1. *(antilinéarité par rapport à la première variable) pour tout $w \in V$, la fonction $v \in V \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{C}$ est antilinéaire* [2]*,*
2. *(linéarité par rapport à la deuxième variable) pour tout $v \in V$, la fonction $w \in V \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{R}$ est linéaire,*
3. *(antisymétrie) pour tout $v, w \in V$, $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$,*
4. *(défini positif) pour tout $v \in V$, $\langle v, v \rangle \geq 0$ avec égalité si et seulement si $v = 0$.*

On peut montrer que les produits scalaires complexes vérifient les principales propriétés des produits scalaires réels :

1. l'application $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}$

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} \quad , v \in V$$

   est une norme sur V au sens de la définition 15,
2. pour tout $v, w \in V$,

$$\langle v + w, v + w \rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2 \,\mathrm{Re}\, \langle v, w \rangle,$$

3. l'inégalité de Cauchy-Schwarz : pour tout $v, w \in V$

$$|\langle v, w \rangle| \leq \sqrt{\langle v, v \rangle} \sqrt{\langle w, w \rangle},$$

4. pour deux vecteurs orthogonaux v et w, c'est-à-dire $\langle v, w \rangle = 0$, on a la relation de Pythagore :

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2.$$

Sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, on introduit l'application

$$(f, g) \in \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \mapsto \langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t)\, dt.$$

Proposition 13 *L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}; \mathbb{C})$.*

Preuve : Par linéarité de l'intégrale, on a bien antilinéarité par rapport à la première variable f, linéarité par rapport à la seconde variable g. Pour vérifier l'antisymétrie, on doit se souvenir comment on définit l'intégrale d'une fonction continue h à valeurs complexes. On décompose h en partie réelle et partie imaginaire $h = h_1 + ih_2$ et on pose

$$\int_a^b h(t)\, dt = \int_a^b h_1(t)\, dt + i \int_a^b h_2(t)\, dt.$$

On en déduit

$$\overline{\int_a^b h(t)\, dt} = \int_a^b h_1(t)\, dt - i \int_a^b h_2(t)\, dt.$$

2. Cela signifie que pour tout $v, v' \in V$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\langle v + \lambda v', w \rangle = \langle v, w \rangle + \overline{\lambda} \langle v', w \rangle$.

Or $\overline{h} = h_1 - ih_2$ et donc

$$\int_a^b \overline{h}(t)\,dt = \int_a^b h_1(t)\,dt - i\int_a^b h_2(t)\,dt.$$

On a donc montré

$$\overline{\int_a^b h(t)\,dt} = \int_a^b \overline{h}(t)\,dt.$$

Appliquons ce résultat à $h = \overline{f}g$:

$$\overline{\langle f, g\rangle} = \overline{\int_a^b \overline{f}g\,dt} = \int_a^b \overline{\overline{f}g}\,dt = \int_a^b \overline{g}f\,dt = \langle g, f\rangle,$$

d'où l'on déduit l'antisymétrie. Enfin,

$$\langle f, f\rangle = \int_a^b \overline{f(t)}f(t)\,dt = \int_a^b |f(t)|^2\,dt \geq 0$$

avec égalité si et seulement si $f = 0$ (on utilise ici que l'intégrale d'une fonction continue positive est nulle ssi la fonction est partout nulle).

$\square$

La norme associée à ce produit scalaire est

$$\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt},$$

qui est la norme $\|\cdot\|_2$ déjà introduite.

Dans la section précédente de ce chapitre, on a vu que la série de Fourier d'une fonction f convergeait pour la norme 2 dès que f est continue (ou continue par morceaux). En revanche, la convergence uniforme exige des hypothèses supplémentaires (par exemple, f continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux). Par ailleurs, on pourra remarquer que pour tout $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$,

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|f\|_\infty^2\,dt \leq \|f\|_\infty^2,$$

et donc $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_\infty$. Cela implique que la convergence uniforme implique la convergence quadratique. En revanche, la réciproque est fausse.

2.3.2 Interprétation du Théorème de Parseval avec le produit scalaire complexe

Le théorème de Parseval peut s'interpréter dans le cadre de ce produit scalaire complexe.

Définition 17 *On dit qu'une famille $\{e_j\}_{j\in J}$ (J est un ensemble d'indices fini ou non) de vecteurs de V est*

1. *orthogonale si pour tout $j, j' \in J$, $j \neq j'$, $\langle e_j, e_{j'}\rangle = 0$,*
2. *orthonormale (ou orthonormée) si pour tout $j, j' \in J$, $\langle e_j, e_{j'}\rangle = \delta_{jj'}$.*

Ci-dessus, la notation $\delta_{jj'}$ désigne le symbole de Kronecker :

$$\delta_{jj'} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = j', \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit pour tout $k \in \mathbb{Z}$ la fonction à valeurs complexes $e_k : t \mapsto e^{ikt}$.

Proposition 14 *La famille $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est orthonormale dans $\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$.*

Preuve : En effet, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |e^{ikt}|^2\,dt = 1,$$

tandis que pour tout $k \neq \ell$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}e^{i\ell t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{i(\ell-k)}e^{i(\ell-k)t}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

$\square$

On note $\mathcal{P}^N_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré $\leq N$, c'est-à-dire le sous-espace vectoriel engendré par la famille $\{e_{-N},\dots,e_N\}$ dans $\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Si f est dans $\mathcal{C}^0_{m,2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, alors pour tout $N \geq 0$, sa série de Fourier $S_N(f)$ est bien un polynôme trigonométrique dans $\mathcal{P}^N_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, mais pas n'importe lequel. En fait, $S_N(f)$ est la projection orthogonale de f sur $\mathcal{P}^N_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Cela signifie que $f - S_N(f)$ est orthogonale à tous les éléments de $\mathcal{P}^N_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Pour le voir, il suffit de vérifier que $f - S_N(f)$ est orthogonal à chacun des e_n, $-N \leq n \leq N$:

$$\langle e_n, f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}f(t)\,dt = c_n(f),$$

et

$$\langle e_n, S_N(f)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}S_N(f)(t)\,dt = \sum_{\ell=-N}^{N} c_\ell(f)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}e^{i\ell t}\,dt = c_n(f).$$

On en déduit

$$\langle e_n, f - S_N(f)\rangle = c_n(f) - c_n(f) = 0,$$

qui est le résultat attendu. En particulier, la fonction $P \in \mathcal{P}^N_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C}) \mapsto \|f-P\|_2^2$ atteint son minimum en $P = S_N(f)$. En effet, c'est une conséquence du *Théorème de Pythagore* : comme $f - S_N(f)$ et $S_N(f) - P$ sont orthogonaux, on a pour tout $P \in \mathcal{P}^N_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$

$$\|f-P\|_2^2 = \|f-S_N(f)\|_2^2 + \|S_N(f)-P\|_2^2 \geq \|f-S_N(f)\|_2^2,$$

avec égalité si et seulement si $P = S_N(f)$. En particulier, pour tout $N \geq 1$, comme $S_{N-1}(f) \in \mathcal{P}^N_{2\pi}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, on a

$$\|f-S_N(f)\|_2 \leq \|f-S_{N-1}(f)\|_2.$$

On en déduit que la suite $(\|f-S_N(f)\|_2)_{N\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Comme tous les termes sont positifs, elle converge. Le fait que sa limite soit nulle est précisément le contenu du Corollaire 3.