TD SIGNAL

Lundi 29 avril 2024 :

Exercice 1 :

1) Soit $u = x - T$, $x = u + T$; $f(x) = f(u+T)$ $\quad \frac{dx}{du} = 1$ donc $dx = du$

Bornes : $x = T \Rightarrow u = 0$
$x = T + a \Rightarrow u = a$

$$\int_T^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^a f(u+T)\,du$$

or $\forall u \in \mathbb{R}, f(u+T) = f(u)$ donc $\boxed{\int_T^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^a f(u)\,du}$

2) La fonction f n'est pas dependante au niveau de periodicité avec a. Utilisons donc une autre methode.

Donc : $\quad * \ (=) \Rightarrow$ Dev chasles

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^T f(x)\,dx + \underbrace{\int_T^{T+a} f(x)\,dx}$$

$$= \int_a^T f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$

$$= \boxed{\int_0^T f(x)\,dx}$$

Exercice 2 :

- P est continue et (2π)- périodique

$\Rightarrow$ On peut appliquer la formule de $c_n(f)$ pour $f = P$ et $T = 2\pi$.

- [Indice : $e^{i 2\pi n} = 1$ lorsque $n \in \mathbb{Z}$

- $$c_n(P) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx} \left(e^{-inx}\right) dx$$

$$= \sum_{k=-N}^{N} \underbrace{\frac{1}{2\pi} c_k \int_0^{2\pi} e^{ikx - inx} dx}$$

$k \neq n$

$$= \cancel{\sum_{k=-N}^{N}} \frac{1}{2\pi} c_k \left[\frac{e^{ikx - inx}}{ik - in} \right]_0^{2\pi}$$

$$= \cancel{\sum_{k=-N}^{N}} \frac{1}{2\pi} c_k \left(\frac{e^{ik2\pi - in2\pi}}{ik - in} - \frac{1}{ik - in} \right) \quad e^{ik2\pi - in2\pi} = 1$$

$$= \cancel{\sum_{k=-N}^{N}} \frac{1}{2\pi} c_k (0)$$

$$\boxed{= 0}$$

$k = n$

$$= \cancel{\sum_{k=-N}^{N}} \frac{1}{2\pi} c_k \int_0^{2\pi} 1 \, dx$$

$$\boxed{= \cancel{\sum_{k=-N}^{N}} c_k} = c_n$$

$$\Rightarrow c_n(P) = \sum_{\substack{k=-N \\ \text{avec } k \neq n}}^{N} 0 + \sum_{\substack{k=-N \\ \text{avec } k = n}}^{N} c_n$$

$$= \boxed{\begin{cases} c_n & \text{si } n \in [-N, N] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

Exercice 3 : Mardi 30 avril 2024

① • f est paire donc $f(-x) = f(x)$.

• Grâce à l'Exercice ①, on peut écrire :

$$b_n(f) = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx$$

$$= \frac{2}{T}\left(\int_0^{T/2} f(x)\sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx + \int_{-T/2}^{0} f(x)\sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx\right)$$

$u = -x$

$$= \frac{2}{T}\left(\int_0^{T/2} f(x)\sin\frac{2\pi n x}{T}dx - \int_0^{T/2} f(u)\sin\left(\frac{2\pi n u}{T}\right)du\right)$$

$$= \frac{2}{T}\times 0 \boxed{= 0}$$

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\left(\int_0^{T/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx + \int_{-T/2}^{0} f(-x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{T}\left(\int_0^{T/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx + \int_0^{T/2} f(u)\cos\left(\frac{2\pi n u}{T}\right)du\right)$$

$$= \boxed{\frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx}$$

② $$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx$$

$$= \frac{2}{T}\left(\int_{-T/2}^{0} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx + \int_0^{T/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx\right)$$

$$= \frac{2}{T}\left[-\int_0^{T/2} f(u)\cos\left(\frac{2\pi n u}{T}\right)du + \int_0^{T/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx\right]$$

$$\boxed{= 0}$$

$$b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx$$

$$= \frac{2}{T}\left(\int_{-T/2}^{0} f(x)\sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx + \int_0^{T/2} f(x)\sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx\right)$$

$$= \frac{2}{T}\left(\int_0^{T/2} f(u) \sin\left(\frac{2\pi n u}{T}\right) du + \int_0^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx \right)$$

$$\boxed{= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx}$$

Exo 4 :

1 Utiliser la formule $\overline{\int g(t)\,dt} = \int \overline{g(t)}\,dt$

On calcule $c_n(\overline{F}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{F(x)}\, e^{-inx}\, dx$

puis $\overline{c_{-n}(F)} = \overline{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x)\, e^{inx}\, dx}$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{F(x)}\, \overline{e^{inx}}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{F(x)}\, e^{-inx}\, dx$$

La fonction est continue et 2π-périodique

On a donc $\boxed{c_n(\overline{F}) = \overline{c_{-n}(F)}}$

2 $g : t \mapsto f(-t)$, f est C^0 et 2π périodique

donc g est également C^0 et 2π périodique

Nous pouvons donc appliquer la formule de c_n.

- $c_{-n}(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{inx}\, dx$
- $c_n(g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x)\, e^{-inx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(-x)\, e^{-inx}\, dx$

Prenons $u = -x$, $\frac{du}{dx} = -1 \Longleftrightarrow du = -dx$

On a donc
$$C_n(g) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{-2\pi} f(u)e^{inu}\,du$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{0} f(u)\,e^{inu}\,du$$

Nous avons vu que f et g sont 2π periodique, donc
$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{0} f(u)e^{inu}\,du = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)\,e^{inu}\,du}$$

CCL : les deux intégrales sont égales !!

(3) h_a est C^0 et 2π périodique car f l'est aussi et a est fixé

$$c_n(h_a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x+a)e^{-nxi}\,dx \qquad \text{Soit } u = x+a,\ x = u-a$$

$f(x+a) = f(u)$ $\qquad \frac{dx}{du} = 1 \Rightarrow dx = du$ $\qquad x = 0 \Rightarrow u = a$

$e^{-inx} = e^{-inu+ina}$ $\qquad x = 2\pi \Rightarrow u = 2\pi + a$

$$C_n(h_a) = \frac{1}{2\pi}\int_a^{2\pi+a} f(u)e^{-inu}e^{ina}\,du = \frac{e^{ina}}{2\pi}\int_a^{2\pi+a} f(u)e^{-inu}\,du$$

Donc
$$\frac{e^{ina}}{2\pi}\int_a^{2\pi+a} f(u)e^{-inu}\,du = \frac{e^{ina}}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)e^{-inu}\,du = \boxed{e^{ina}\,c_n(f)}$$

Exercice 5 :

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π- périodique, $f = 1$ sur $]0,\pi[$

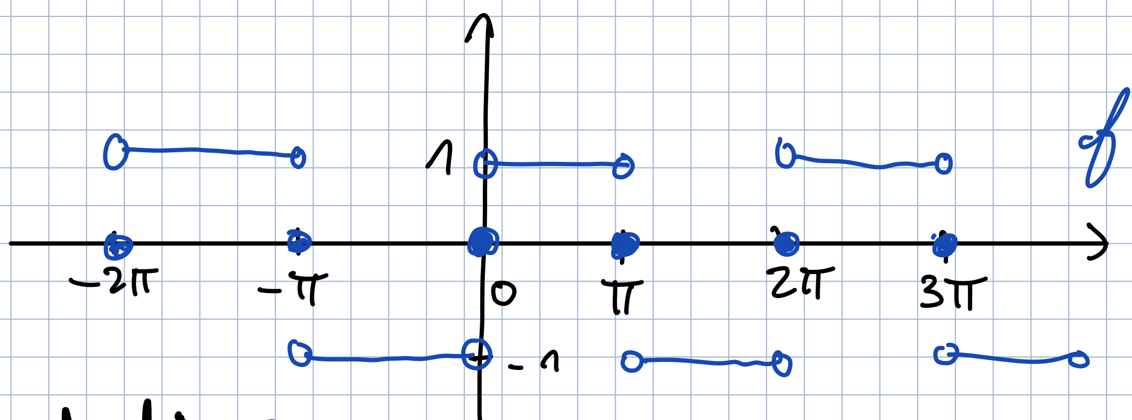
impaire : $f(-x) = -f(x)$

- $f(0) = f(-0) = -f(0) \Rightarrow \boxed{f(0) = 0}$

- $f(\pi) \underset{\text{par } 2\pi \text{ périodicité}}{=} f(\pi - 2\pi) = f(-\pi) \underset{\text{imparité}}{=} -f(\pi)$

$\Rightarrow \boxed{f(\pi) = 0}$

(2)



Vendredi 3 mai 2024 :

(3) f est constante par morceaux

$\Rightarrow$ dérivable par morceaux de dérivée $=0$ continue

$\Rightarrow \boxed{f \in \mathcal{C}^1.}$

(4) Grâce à l'exo 3, $a_n(f) = 0$

f est impaire et 2π périodique.

$b_n(f) = \frac{2}{T}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$

$= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx + \int_{-\pi}^{0} f(x)\sin(nx)\,dx\right)$ $\quad u = -x$, $du = -dx$

$= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx + \int_0^{\pi} \sin(nu)\,du\right)$

$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_0^{\pi}$

$$= -\frac{2}{\pi n} \times ((-1)^n - 1)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{si } n \text{ pair : } b_n(f) = 0 \\ \text{si } n \text{ impair : } b_n(f) = \frac{4}{\pi n} \end{array}}$$

⑤ **Indice 1 :** Combiner Thm 7 page 23 ("Dirichlet") avec Def 13 page 19

Indice 2 :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{\substack{n=1 \\ \text{paire} \\ (n=2k)}}^{+\infty} a_n + \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impaire} \\ (n=2k+1)}}^{+\infty} a_n$$
$$= \sum_{k=1}^{+\infty} a_{2k} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1}$$

⑤ Def 13 p 19 :

$$S_N(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)$$

On sait que $a_0(f)$ et $a_n(f) = 0$ car question 4

$$S_N(f)(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{\pi n}\left(-(-1)^n + 1\right)\sin(nx)$$
$$= \sum_{\substack{n=2 \\ (n \text{ paire})}}^{N} 0 + \sum_{\substack{n=1 \\ (n \text{ impaire})}}^{N} \frac{4}{\pi n}\sin(nx)$$
$$= \sum_{k=0}^{?} \frac{4\sin((2k+1)x)}{\pi(2k+1)}$$

$n = 2k+1$

$k = \frac{n-1}{2}$

pour $n = 1$

$k = 0$

pour $n = N$

$k = \frac{N-1}{2}$

$n=k$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} \frac{4\sin((2n+1)x)}{\pi(2n+1)}$$

$$\lim_{N \to +\infty} S_N(f)(x) = \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4\sin((2n+1)x)}{\pi(2n+1)} = \tilde{f}(x)}$$

car Th de Dirichlet.

⑥ On a determiné à la question précédente que

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \times \frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)}.$$

afin de correspondre à la question 6, on cherche x tq

$$\sin[(2n+1)x] = (-1)^n$$

Essayons pour $n=0 \to \sin(2\times 0+1)\times x = \sin(1\times x)$

Ainsi on remarque que x doit être $\pm\frac{\pi}{2}$ pour $n=0$.

Prenons $x = \frac{\pi}{2}$:

n	$\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)$
0	$\sin\frac{\pi}{2} = 1$
1	$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$
2	$\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 1$

On remarque qu'il y a une repetition. Prenons donc $x = \frac{\pi}{2}$

On obtient donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \times \frac{\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \times \frac{\overbrace{\sin\left(\pi n + \frac{\pi}{2}\right)}^{=(-1)^n}}{(2n+1)}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \times \frac{(-1)^n}{(2n+1)}$$

En prenant le th de Dirichlet page 23, on a

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2}\left(f(x^-) + f(x^+)\right) \quad \text{avec } x = \frac{\pi}{2}$$

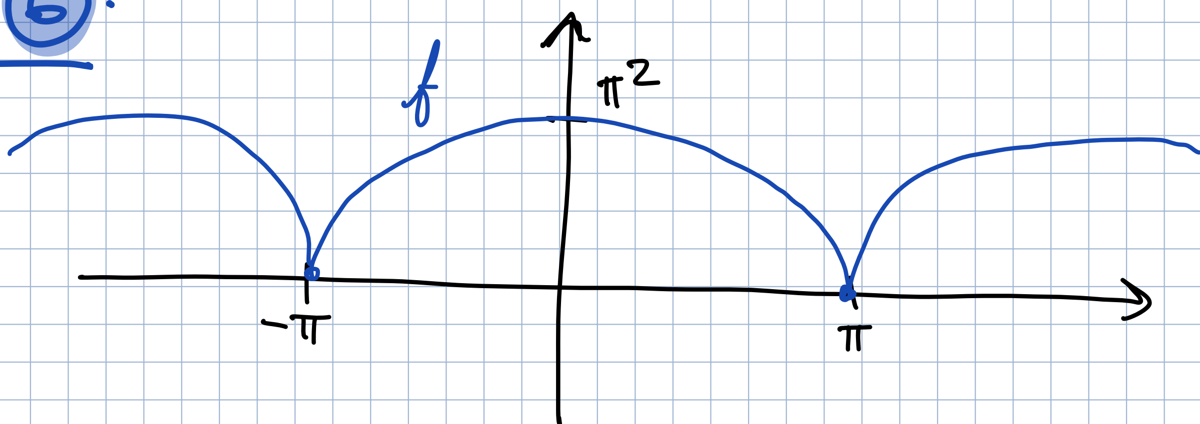
Nous avons vu à la question 2 que $f(x^-) = f(x^+) = f(x) = 1$ pour $x = \frac{\pi}{2}$.

Donc $\tilde{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}(1+1) = \frac{1}{2} \times 2 = 1$

Ainsi $\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 \iff \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$

Exo 6 :

1



2 • f est continue sur $]-\pi, \pi[$

Or $\lim_{x \to \pi^-} f(x) = 0 = \lim_{x \to \pi^+} f(x)$

$\Rightarrow$ f continue sur $[-\pi, \pi]$

$\Rightarrow$ $\boxed{f \text{ continue sur } \mathbb{R}}$ par 2π-pér.

• $\boxed{f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ par morceaux}}$

(même $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux !!)

car polynomiale sur $]-\pi ; \pi[$

et 2π - périodique.

3 (Lundi 13 mai 2024)

$$C_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - x^2)\, e^{-inx}\, dx \qquad u' = e^{-inx} \quad v = \pi^2 - x^2 \qquad u = -\frac{e^{-inx}}{ni} \quad v' = -2x$$

si $n \neq 0$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\underbrace{\left[-\frac{e^{-inx}}{ni}(\pi^2 - x^2)\right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - \int_{-\pi}^{\pi} 2x\,\frac{e^{-inx}}{ni}\, dx\right) \qquad u' = \frac{e^{-inx}}{ni} \quad v = x \qquad u = +\frac{e^{-inx}}{n^2} \quad v' = 1$$

$$= \frac{-1}{2\pi}\left(\left[2\frac{e^{-inx}}{n^2}\, x\right]_{-\pi}^{\pi} - 2\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-inx}}{n^2}\, dx\right)$$

$$= -\frac{2}{2\pi}\left(\left(\frac{e^{-in\pi}\times\pi}{n^2} + \frac{e^{in\pi}\times\pi}{n^2}\right) + \left[\frac{e^{-inx}}{n^3 i}\right]_{-\pi}^{\pi}\right)$$

$$= -\frac{2}{2\pi}\left(\left(\frac{(-1)^n\times\pi}{n^2} + \frac{(-1)^n\pi}{n^2}\right) + 0\right)$$

$$= -\frac{2}{2\pi}\times\frac{2(-1)^n\pi}{n^2} = \boxed{\frac{-(-1)^n\times 2}{n^2}}$$

si $n = 0$, $C_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi^2 - x^2)\, dx$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\pi^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\pi^3 - \frac{\pi^3}{3} + \pi^3 - \frac{\pi^3}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{4\pi^3}{3}\right) = \boxed{\frac{2\pi^2}{3}}$$

4 Indice 1 : Combiner Def 13 page 19 et Thm 7 page 23

Indice 2 : Pour la 2^e série,

[utiliser Thm 8 page 24

$$\lim_{N\to+\infty} S_N(f)(x) = \frac{2}{3}\pi^2 + \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(-\frac{2}{n^2}(-1)^n\right)e^{inx}}_{= \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{2}{(-n)^2}(-1)^{-n}\, e^{-inx}} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{2}{n^2}(-1)^n e^{inx}\right)$$

mêmes coefficients

$e^{inx} + e^{-inx} = 2\cos(nx)$

$$\lim_{N\to+\infty} S_N(f)(x) = \frac{2\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} -2\frac{(-1)^n}{n^2}\times 2\cos(nx)$$

$$= \frac{2\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx) \quad = \tilde{f}(x) \quad \text{(Th. Dirichlet)}$$

Or puisque f est $\mathcal{C}^0$, $\tilde{f}(x) = f(x)$

Donc $\forall x \in [-\pi;\pi]$, $\pi^2 - x^2 = \frac{2\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$

En particulier, pour $x = \pi$, on a : $\frac{2\pi^2}{3} = 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} \iff \boxed{\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}}$

Rappel : $\|f\|_2 = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\, dt}$

pour f qui est T-périodique et $\mathcal{C}^0$

$$\|f\|_2^2 = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\, dt}^{\,2}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\pi^2 - t^2|^2\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\pi^4 - 2\pi^2 t^2 + t^4)\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\pi^4 t - \frac{2}{3}\pi^2 t^3 + \frac{1}{5}t^5\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\pi^5 - \frac{2}{3}\pi^5 + \frac{\pi^5}{5} - \left(-\pi^5 + \frac{2}{3}\pi^5 - \frac{\pi^5}{5}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\pi^4 - \frac{4}{3}\pi^4 + \frac{2}{5}\pi^4\right) = \boxed{\pi^4 \times \frac{8}{15}}$$

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2 = |c_0(f)|^2 + \sum_{n=-\infty}^{-1} |c_n(f)|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} |c_n(f)|^2$$

$$= \frac{4}{9}\pi^4 + \sum_{n=-\infty}^{-1} \left|\frac{(-1)^{n+1}\times 2}{n^2}\right|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\times 2}{n^2}\right|^2$$

$$\boxed{= \frac{4}{9}\pi^4 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^4}}$$

Avec le Th. de Parseval:

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$$

$$\iff \pi^4 \frac{8}{15} = \frac{4}{9}\pi^4 + 8\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$$

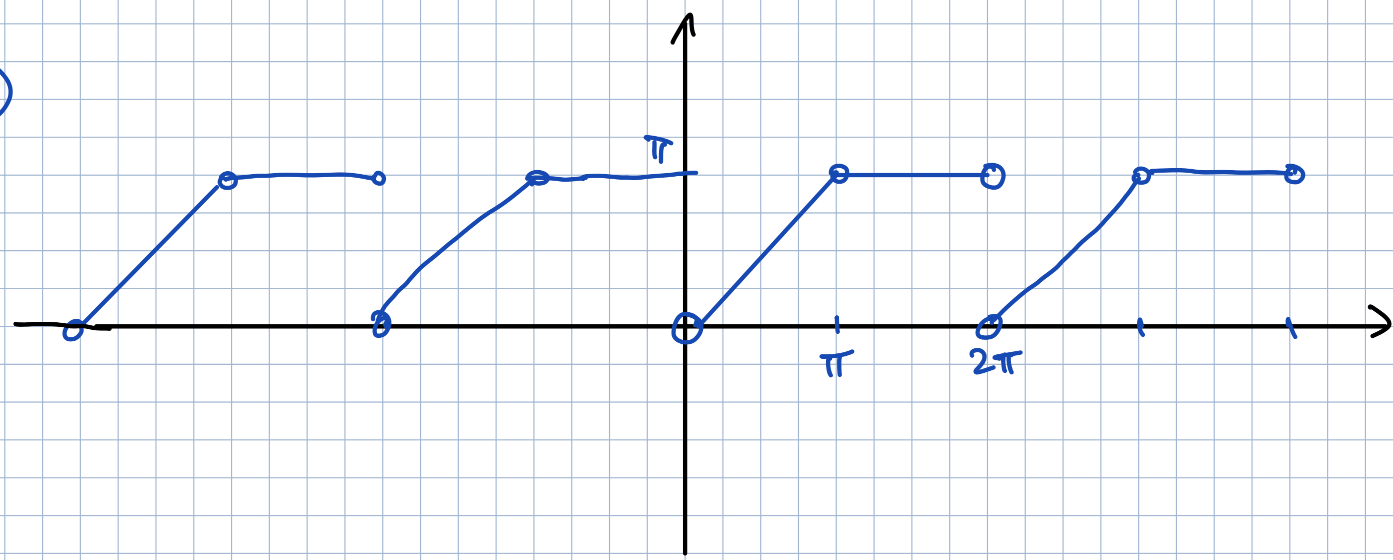
$$\iff \pi^4 \frac{8}{15} - \frac{4}{9}\pi^4 = 8\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$$

$$\iff \pi^4 \frac{1}{15} - \frac{1}{18}\pi^4 = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$$

$$\iff \pi^4\left(\frac{1}{15} - \frac{1}{18}\right) = \boxed{\pi^4 \times \frac{1}{90} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}}$$

Exo 7 :

①



② La fonction f est polynomiale par morceaux, donc $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

③ et ④ comme Exo ⑥ → à faire à la maison.

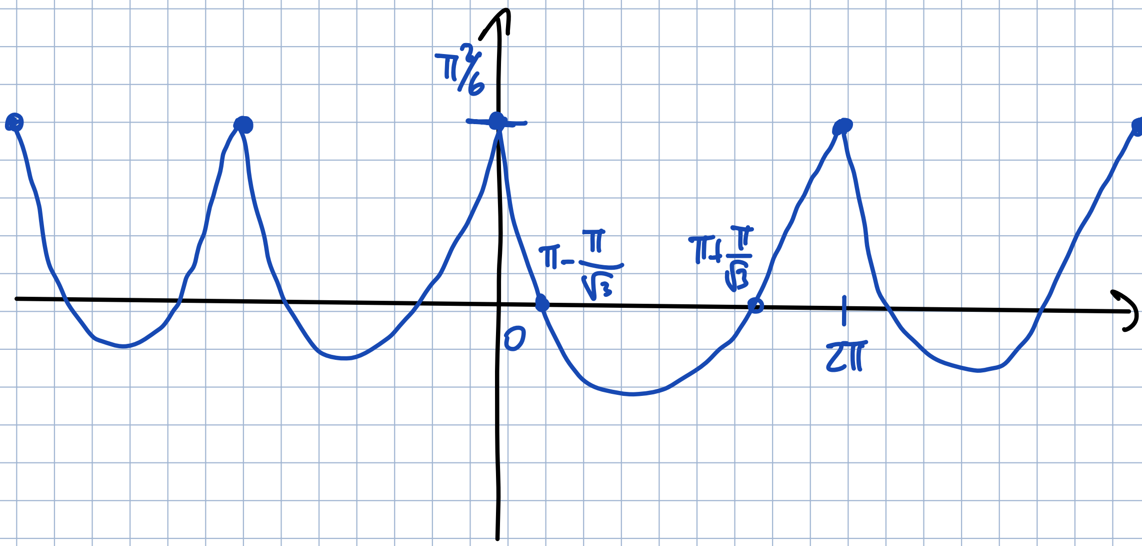
Exo 8 : (Mardi 14 mai 2024)

- On veut appliquer le Thm de Dirichlet, on choisit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{2}x + \frac{1}{4}x^2 \quad \text{pour } x \in [0, 2\pi[$$

et on l'étend sur $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité.

- $f(2\pi) = \frac{\pi^2}{6}$



f est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$,
et $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux car polynomiale par morceaux.

- On calcule les coefficients trigonométriques:

Pour $n \neq 0$: $a_n(f) = \dots$ faire 2 ipp $\dots = \frac{1}{n^2}$

Pour $n = 0$: $a_0(f) = \dots = 0$

- Pour les b_n : (Voir graphique), comme f est paire on utilise l'Exo 3 pour voir que $b_n(f) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

- Ainsi :

$$S_N(f)(x) = \overbrace{\frac{a_0(f)}{2}}^{=0} + \sum_{n=1}^{N} \underbrace{a_n(f)}_{=1/n^2} \cos(nx) + \sum_{n=1}^{N} \underbrace{b_n(f)}_{=0} \sin(nx)$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

On fait $N \to +\infty$, et on utilise le Thm de Dirichlet : $\forall x \in [0, 2\pi]$.

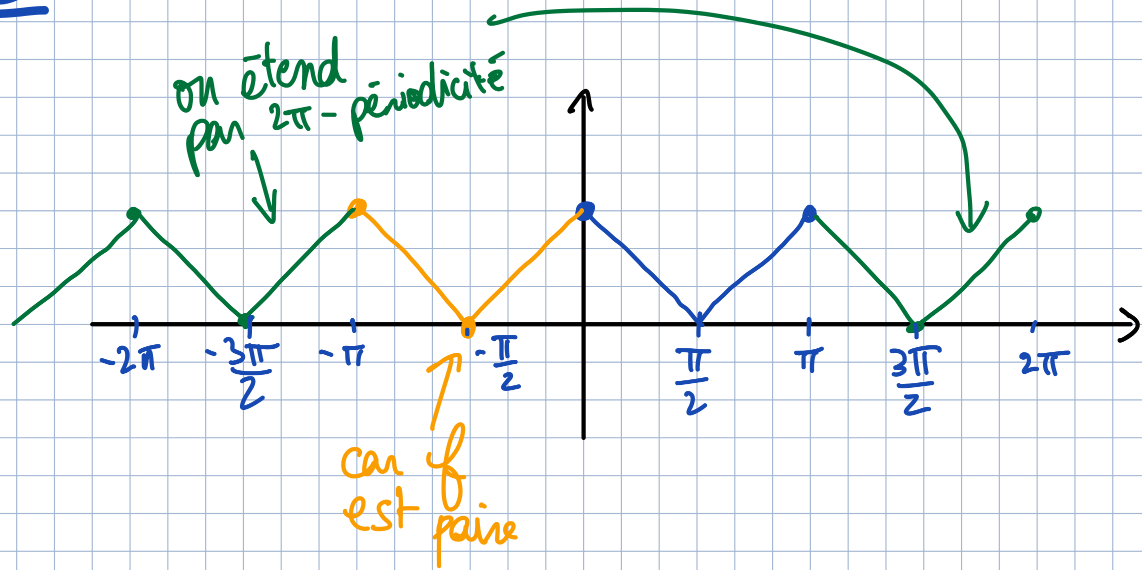
$$\lim_{N \to +\infty} S_N(f)(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

$$= \tilde{f}(x) = f(x) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{2}x + \frac{1}{4}x^2$$

car f est continue sur $\mathbb{R}$

Exo 9 :

1



2
- f est continue sur $\mathbb{R}$ car continue par morceaux et continue aux bords des intervalles
- f est polynomiale par morceaux donc $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux.

③ • f est paire $\Rightarrow$ $\boxed{b_n(f) = 0}$ $\forall n$.

• On remarque f est π-périodique $\Rightarrow T = \pi$

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(-x+\frac{\pi}{2}\right)\cos(2nx)\,dx$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos(2nx)\,dx$$

$$= \dots \text{ ipp } \dots$$

$$= \frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}$$ pour $n \neq 0$, et $\boxed{a_0(f) = \frac{\pi}{2}}$

④ Indice : Thm 6 page 20

• f est $\mathcal{C}^0$ et 2π-périodique, et $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

• $$\sum_{n=0}^{+\infty} |b_n(f)| = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 0 \quad \text{converge}$$

• $$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n(f)| = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\left|\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}\right|}_{= \frac{1-(-1)^n}{\pi n^2} \leq \frac{2}{\pi} \times \frac{1}{n^2}}$$

$$\leq \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}}$$

Converge par le critère de Riemann

(Rappel : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ CVG $\Leftrightarrow \alpha > 1$)

On peut appliquer le Thm 6 page 20 :

$(S_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$ Converge normalement vers f

$\Rightarrow (S_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.

⑤ Rappel : $\boxed{\|g\|_2^2 := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(x)|^2\,dx}$ ♡

pour g 2π-périodique.

$$\lim_{N\to+\infty} \int_0^{2\pi} |S_N(f)(x) - f(x)|^2\,dx$$

$$= 2\pi \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\underbrace{S_N(f)(x) - f(x)}_{=:g(x)}|^2\,dx$$

$$= 2\pi \lim_{N\to+\infty} \|S_N(f) - f\|_2^2$$

On veut appliquer le Corollaire 3 page 26 (" convergence quadratique ") : on a bien que f est continue par morceaux, 2π-périodique et $\mathbb{R}\to\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$, donc

$$\lim_{N\to+\infty} \|S_N(f) - f\|_2 = 0$$

$\Rightarrow$ En mettant au carré et en multipliant par 2π, on a bien le résultat voulu :

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty} \int_0^{2\pi} |S_N(f)(x) - f(x)|^2 \, dx = 0}.$$

Exo 10 :

1) On suppose $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.
On sait que f est continue, donc continue par morceaux, et elle est 2π-pér.

$\Rightarrow$ On peut appliquer le Thm de Parseval :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \text{ converge}$$

$$\Rightarrow |c_n(f)|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \boxed{c_n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}.$$

2) (a) On a $c_n(f') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(x) e^{-inx} \, dx$.

et $in\, c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} in\, f(x) e^{-inx} \, dx$

Faisons une IPP sur $c_n(f)$ avec : $u(x) = f(x)$ $\quad u'(x) = f'(x)$
$v(x) = -e^{-inx}$ $\quad v'(x) = in\, e^{-inx}$

On obtient $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \left(\left[f(x) \times (-e^{-inx}) \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} f'(x) e^{-inx} \, dx \right)$

On a une 2π periodicité donc $f(0)=f(2\pi)$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(f(2\pi)\times\left(-e^{-in2\pi}\right) - f(0)\times\left(-e^{-in0}\right) + \int_0^{2\pi} f'(x)e^{-inx}\,dx \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\underbrace{f(0)\times\left(-e^{-in0}\right) - f(0)\times\left(-e^{-in0}\right)}_{=0} + \int_0^{2\pi} f'(x)e^{-inx}\,dx \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)e^{-inx}\,dx$$

CCL : $\boxed{C_n(f') = in\, C_n(f).}$

② b

Rappel : " petit o "

On dit que $a_n = o(b_n)$

ssi $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

On a ici $C_n(f) = o\left(\frac{1}{n}\right)$ ssi $\frac{c_n(f)}{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\iff n\, c_n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\iff \frac{C_n(f')}{i} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

or f est $C^1 \Rightarrow f'$ est C^0

et f est 2π-périodique $\Rightarrow f'$ aussi

et par la Q1, on a $C_n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ pour f C^0 et 2π-périodique

$\Rightarrow C_n(f') \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ aussi

$\Rightarrow \frac{1}{i}C_n(f') \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\boxed{\Rightarrow c_n(f) = o\left(\frac{1}{n}\right)}$