Travaux Dirigés sur les séries de Fourier

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et T périodique, avec $T > 0$. Ses coefficients de Fourier trigonométriques sont définis par

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)dx, \quad b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)dx, \quad n \in \mathbb{N},$$

et ses coefficients de Fourier complexes par

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-i\frac{2\pi nx}{T}}\,dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 1. Soit f une fonction continue T périodique, avec $T > 0$, et soit $a \in \mathbb{R}$.

1. Montrez que
$$\int_T^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx.$$
2. Déduisez-en que
$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx.$$

Exercice 2. Soit P le polynôme trigonométrique

$$P(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R},$$

où les coefficients c_k sont complexes. Calculez ses coefficients de Fourier complexes.

Exercice 3. Soit f une fonction continue T périodique, avec $T > 0$.

1. Montrez que si f est paire alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n(f) = 0$ et
$$a_n(f) = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)dx.$$
2. Montrez que si f est impaire alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$ et
$$b_n(f) = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)dx.$$

Exercice 4. Soit f une fonction continue et 2π périodique.

1. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$.
2. On note g la fonction $t \mapsto f(-t)$. Montrez que $c_n(g) = c_{-n}(f)$.

3. Soit $a \in \mathbb{R}$. On note h_a la fonction $t \mapsto f(t+a)$. Montrez que $c_n(h_a) = e^{ina} c_n(f)$.

Exercice 5. Soit f la fonction 2π périodique, impaire, et qui vaut 1 sur l'intervalle $]0,\pi[$. Cette fonction particulière est appelée fonction créneau.

1. Que vaut f en 0 ? En π ?
2. Dessinez le graphe de f sur plusieurs périodes.
3. Justifiez que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.
4. Calculez les coefficients de Fourier trigonométriques de f.
5. Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4\sin((2n+1)x)}{\pi(2n+1)},$$

   où $\tilde{f}$ est la régularisée de f, c'est-à-dire la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\tilde{f}(x) = \frac{1}{2}(f(x^-) + f(x^+))$ où $f(x^-)$ (resp. $f(x^+)$) désigne la limite à gauche (resp. à droite) de f au point x.
6. Déduisez-en que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 6. Soit f la fonction 2π périodique définie par $f(x) = \pi^2 - x^2$ pour $x \in [-\pi,\pi]$.

1. Dessinez le graphe de f sur plusieurs périodes.
2. Justifiez que f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.
3. Calculez les coefficients de Fourier complexes de f.
4. En étudiant la convergence de la série de Fourier de f, montrez les égalités suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Exercice 7. Soit f la fonction 2π périodique définie par $f(x) = x$ pour $x \in]0,\pi[$ et $f(x) = \pi$ pour $x \in]\pi, 2\pi[$.

1. Dessinez le graphe de f sur plusieurs périodes.
2. Justifiez que f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.
3. Calculez les coefficients de Fourier trigonométriques de f.
4. En étudiant la convergence de la série de Fourier de f, déduisez-en les égalités suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Exercice 8. Montrez que pour tout $x \in [0, 2\pi]$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{2}x + \frac{1}{4}x^2.$$

Exercice 9. Soit f la fonction 2π périodique et paire telle que

$$\forall x \in [0,\pi], \qquad f(x) = \left|x - \frac{\pi}{2}\right|.$$

1. Dessinez le graphe de f sur plusieurs périodes.
2. Montrez que f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.
3. Calculez les coefficients de Fourier de f.
4. Est-ce que la série de Fourier $(S_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$ de f converge uniformément ? On justifiera la réponse.
5. Est-ce que

$$\lim_{N\to+\infty} \int_0^{2\pi} |S_N(f)(x) - f(x)|^2 \, dx = 0 \qquad ?$$

   On justifiera la réponse.

Exercice 10. Soit f une fonction continue 2π périodique.

1. Montrez que $\lim_{|n|\to+\infty} c_n(f) = 0$. Cette décroissance vers 0 des coefficients de Fourier est connue sous le nom de lemme de Riemann-Lebesgue (ici restreint aux fonctions continues périodiques).
2. On suppose de plus que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
   (a) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $c_n(f') = in\, c_n(f)$.
   (b) Déduisez-en que $c_n(f) = o(\frac{1}{n})$, $|n| \to +\infty$.

Exercice 11.

Soient $\alpha \notin \mathbb{Z}$ et f la fonction 2π périodique définie par $f(x) = e^{i\alpha x}$ pour $x \in -]\pi, \pi[$.

1. Calculez ses coefficients de Fourier complexes.
2. Déduisez-en les sommes suivantes :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\alpha+n)^2}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\alpha}{n^2-\alpha^2}.$$

Exercice 12.

Soit $\alpha > 0$ un paramètre fixé et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |\sin(\alpha x)|$.

1. Calculez ses coefficients de Fourier trigonométriques.
2. Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi(1-4n^2)} \cos(2\alpha n x).$$

3. Calculez la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$.

Exercice 13. Soit f une fonction 2π périodique de classe C^1 vérifiant $\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$.

1. Montrez l'inégalité suivante, dite inégalité de Wirtinger :

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx \leqslant \int_0^{2\pi} |f'(x)|^2 \, dx.$$

2. Déterminez les cas d'égalité.

Exercice 14. Soit f une fonction 2π périodique de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$.
1. Montrez l'inégalité suivante : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x)| \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{|n|}\,|c_n(f')|.$$

2. Déduisez-en l'inégalité suivante :

$$\|f\|_\infty^2 \leqslant \frac{\pi}{6}\int_0^{2\pi} |f'(x)|^2\,dx.$$

Exercice 15. Soient f et g deux fonctions continues 2π périodiques. On définit leur produit de convolution périodique par

$$f\star g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)g(x-y)\,dy, \quad x\in\mathbb{R}.$$

On admet que la fonction $f\star g$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
1. Montrez que $f\star g = g\star f$.
2. Montrez que $f\star g$ est 2π périodique.
3. Montrez que si f et g sont paires alors $f\star g$ l'est aussi.
4. Montrez que pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $f\star e_n = c_n(f)\,e_n$, où e_n désigne la fonction $e_n : x\in\mathbb{R}\mapsto e^{inx}\in\mathbb{C}$.
5. Montrez que pour tout $n\in\mathbb{Z}$, on a

$$c_n(f\star g) = c_n(f)\,c_n(g).$$

Exercice 16. Soit f une fonction continue 2π périodique. On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$u'' - u = f,$$

parmi les fonctions 2π périodiques u.

1. Un cas particulier : si $a, b\in\mathbb{R}$ et $f(x) = a\cos x + b\sin x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, déterminez toutes les solutions 2π périodiques de cette équation.
2. On suppose dans cette question que u est une fonction 2π périodique de classe $\mathcal{C}^2$, solution de l'équation différentielle. Montrez que

$$c_n(f) = -(1+n^2)\,c_n(u), \qquad \forall n\in\mathbb{Z}.$$

   Déduisez-en une formule exprimant u en fonction des coefficients de Fourier complexes de f.
3. Pour étudier la réciproque, on suppose de plus que les coefficients de Fourier complexes de f sont sommables, *i.e.*, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|$ converge. Montrez que la fonction définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par

$$u(x) = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{c_n(f)}{1+n^2}\,e^{inx},$$

   est 2π périodique de classe $\mathcal{C}^2$ et solution de l'équation.
4. Montrez que $u = f\star G$ pour une certaine fonction G périodique que l'on déterminera.